3. ZBIORY JAKO WIZUALIZACJA ILOŚCI

Pojęcie zbioru

Zbiór ma być pojęciem niedefiniowalnym, a więc pierwotnym, określanym przez aksjomaty (pewniki, postulaty, dogmaty). Najogólniej rzecz ujmując, zbiorem (mnogością) nazywamy kolekcję traktowaną jako pojedynczy przedmiot. Posłużmy się przykładem zbioru planet, utworzonym z kolekcji cielesnych gigantów, których nie sposób nie zauważać. Wyrażenie: zbiór planet jest dwuwyrazową nazwą (grupą lub frazą nominalną z punktu widzenia gramatyki); podobnie osobno wyrażenia: zbiór i planeta są jednowyrazowymi nazwami. Zajmijmy się najpierw drugą z tych nazw, czyli nazwą: planeta; oznacza ona (po głosowaniu astronomów, bo znaczenie, wyznaczające zakres nazwy, jest zawsze trudne do zdefiniowania) kolekcję ośmiu ciał niebieskich o nazwach: Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran, Neptun. Mamy wobec tego do czynienia z nazwami (składowymi językowymi) oraz przedmiotami (składowymi pozajęzykowymi), które należy od siebie precyzyjnie odróżniać; mylenie nazw z przedmiotami to dziecięca choroba matematyki (na przykład: dwa zbiory są równe, jeśli mają te same elementy; mówi się tu o nazwach, bo mogą być dwie, a nie o przedmiotach, bo taki jest tylko jeden). Aby zrealizować to rozróżnienie uciekniemy się do formalizmu opisowego; będziemy dalej konsekwentnie oznaczali nazwy dużymi literami, a odpowiadające im przedmioty – małymi, przykładowo nazwie: C odpowiada przedmiot: c. W naszych rozważaniach o planetach uprośćmy nazwę planeta do P, a nazwy konkretnych planet do: H (Merkury to po grecku Hermes), V (Venus), E (Earth), M, J, S, U, N; natomiast odpowiadające im przedmioty odpowiednio do: p, h, v, e, m, j, s, u, n. Wyrażenie: przedmiot o nazwie C będziemy zapisywać z niekonwencjonalnym wykorzystaniem nawiasów klamrowych: }C{, co w rezultacie da równość (:=) referencyjną:

$$\}C\{ =_{ref} c,$$

którą odczytujemy: przedmiot o nazwie C jest równy (referencyjnie) c; czytać to można także: c jest desygnatem (referentem) nazwy C. Do opisu planet możemy użyć albo uproszczonych nazw przedmiotów: P = H, V, E, M, J, S, U, N, albo symboli przedmiotów: }P{ := }H{, }V{, }E{, }M{, }J{, }S{, }U{, }N{ := h, v, e, m, j, s, u, n := p. Dowodem na to, że nie jest to zbędne mnożenie bytów lub udziwnianie oznaczeń jest dwuwyrazowa nazwa: zbiór planet, której odpowiadają symbole: {}P{} = {}H{, }V{, }E{, }M{, }J{, }S{, }U{, }N{} = {h, v, e, m, j, s, u, n} = {p}. Przy zbiorze C-ów w równości referencyjnej }C{ $=_{ref}$ c pojawiają się nawiasy klamrowe (mnogościowe) tak samo, jak w teorii zbiorów:

$$\{\}C\{\} = \{c\}.$$

W naszym przykładzie zbiór planet zapisujemy: {}P{} = {h, v, e, m, j, s, u, n} = {p}, z czego natychmiast wyciągamy wniosek, że przy opisie zbioru (skończonego z małą liczbą elementów) w nawiasach klamrowych nie mogą pojawiać się nazwy przedmiotów; muszą tam znaleźć się ich symbole. Bezsensowny będzie wobec tego zapis zbioru planet, nagminnie przytaczany w podręcznikach, w postaci: z(Planet) = {Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran, Neptun}, bo w nawiasie klamrowym mamy nie przedmioty, ale nazwy, a więc przynajmniej po prawej stronie równości jest to zbiór nazw planet, a nie planet jak po lewej. Poprawnie zbiór planet z wykorzystaniem nazw można (usuwając zbędne przecinki) zapisać:

z(Planet) =
= {}Planeta{} = {}Merkury{}Wenus{}Ziemia{}Mars{}Jowisz{}Saturn{}Uran{}Neptun{}.

Zauważmy, że kolejne ogniwa, na przykład: Saturn{}, Uran{} oraz Neptun{}, w łańcuchu opisującym zbiór z wykorzystaniem nazw, mogą być swobodnie dołączane bez żadnych kłopotów graficznych w ramach rysunków, do jakich sprowadzają się podobne wyrażenia; planety (elementy), których nie ma reprezentowane są w ogniwach przez „zbiory puste”: {}.

Formalizacja wypowiedzi dotyczących zbiorów

Do sprecyzowania opisu zbiorów posłużmy się formą zdania języka potocznego, a więc formą podstawowej wypowiedzi, na którą składają się, najogólniej rzecz ujmując, nazwa A (podmiot zdania), łącznik w postaci czasownika: być oraz nazwa B (orzecznik). Łącznik, jako czasownik, może wystąpić bądź w liczbie pojedynczej, bądź mnogiej; stąd pojawiają się dwa typy zdań: A jest B (A jest B-em) oraz A są B (A-y są B-ami). Zdania A jest B oraz A są B będziemy dalej oznaczali odpowiednio (skracali do): A ε B oraz A α B.

Wyrażenie: przedmiot A, precyzyjniej przedmiot o nazwie A, będziemy w celu odróżnienia go od wyrażenia: nazwa A, zapisywać: }A{, lub w skrócie: a. Przedmiot albo kolekcja (o nazwie) A może być elementem, czyli przedmiotem co najwyżej jednostkowym (co najwyżej pojedynczym), lub mnogim (kolekcja właściwa). Na przykład: przedmiot o nazwie planety lub przedmiot o nazwie planety olbrzymy to przedmioty mnogie, natomiast przedmiot (o nazwie) Jowisz lub przedmiot o nazwie zbiór planet to przedmioty jednostkowe (pojedyncze).

W języku teorii mnogości mówimy, że przedmiot (o nazwie) A należy do przedmiotu (o nazwie): być B-em, wykorzystując przy tym formy dwóch typów zdań języka potocznego: formę zdania A jest B dla należenia do zbioru w sensie dystrybutywnym oraz formę zdania A są B dla należenia do zbioru w sensie kolektywnym. Wyrażenie: przedmiot o nazwie: być B-em (jest B-em lub są B-ami) zastępowane jest wyrażeniem: zbiór B-ów, także w postaci symbolu: z(B-ów). Zamiast mówić: przedmiot o nazwie A należy do zbioru B-ów w sensie dystrybutywnym mówimy: element (o nazwie) A należy do zbioru B-ów (w sensie dystrybutywnym), natomiast zamiast mówić: przedmiot o nazwie A należy do zbioru B-ów w sensie kolektywnym mówimy: kolekcja (o nazwie) A należy do zbioru B-ów (w sensie kolektywnym). Sens dystrybutywny oraz kolektywny będziemy wobec tego przypisywali relacji należenia (do zbioru), a nie zbiorowi, czyli inaczej niż się (w Polsce) przyjmuje.

Rozpocznijmy od kolektywnego należenia przedmiotu, czyli kolekcji, do zbioru, bowiem jest to zagadnienie prostsze i historycznie wcześniejsze. Piszemy, że kolekcja (o nazwie) A należy do zbioru B-ów (przedmiotu o nazwie: są B-ami) zawsze i tylko wtedy, gdy A-y są B-ami:

$$\}A\{ \propto \}\alpha B\{ \leftrightarrow A\ \alpha\ B,$$

co dalej upraszczamy do:

$$a \propto \{\}B\{\} \leftrightarrow A\ \alpha\ B,$$

a następnie do:

$$a \propto \{b\} \leftrightarrow A\ \alpha\ B.$$

Uprościliśmy wyrażenie: }A{ (przedmiot o nazwie A) do małej litery: a, użyliśmy znaku $\propto$ (stylizowanego alfa) do zapisu relacji należenia w sensie kolektywnym, zastąpiliśmy: }αB{ (przedmiot o nazwie: są B-ami) przez {}B{} = {b}, co oznacza: zbiór utworzony z }B{, a więc z przedmiotu o nazwie B, z wykorzystaniem obejmujących go klamrowych nawiasów zbiorowych {}.

Podobnie, ale z zastosowaniem znaku negacji, postępujemy przy dystrybutywnym należeniu przedmiotu, czyli elementu, do zbioru. Piszemy, że element (o nazwie) A nie należy do zbioru B-ów (przedmiotu o nazwie: jest B-em) zawsze i tylko wtedy, gdy A nie jest B-em:

$$\}A\{ \notin \}\varepsilon B\{ \leftrightarrow \sim A\ \varepsilon\ B,$$

co dalej upraszczamy do:

$$a \notin \{\}B\{\} \leftrightarrow \sim A\ \varepsilon\ B,$$

a następnie do:

$$a \notin \{b\} \leftrightarrow \sim A\ \varepsilon\ B.$$

Uwaga, że przedmiot o nazwie: są B-ami oraz przedmiot o nazwie: jest B-em upraszczamy w taki sam sposób, to jest do {}B{} lub {b}, uzasadnia, że dystrybutywny i kolektywny charakter należy przypisać relacjom należenia (nienależenia), oznaczanym tu odpowiednio przez: $\propto$ i $\in$ ($\notin$), a nie zbiorom, czyli przedmiotom o nazwie: być B-em i symbolu: z(B-ów).

Element jest zawsze szczególnym przypadkiem kolekcji (niewłaściwej), ale przy tym ciągle należy pamiętać, że zbiór (utworzony z kolekcji za pomocą objęcia jej symbolu nawiasami zbiorowymi) jest elementarnym przedmiotem wyższego (o jeden) typu (w sensie teorii typów) aniżeli ta kolekcja, która elementem być nie musi. Mamy wobec tego bardziej precyzyjne wyjaśnienie pojęcia zbioru; jest on po prostu przedmiotem elementarnym wyższego typu od tworzącej go kolekcji.

Podejrzenie, że w przypadku ostatnich trzech formuł można zmienić relację nienależenia na relację należenia usuwając zarazem negację przedzdaniową (zaprzeczyć obie strony równoważności) nie sprawdza się z tego powodu, że po lewej stronie tych formuł mamy wyrażenia graficzne (rysunki), które oceniamy dwuwartościowo, natomiast wyrażenia po prawej stronie mają charakter językowy i w dodatku wielowartościowy. Zdania: A są B uznawane są tylko wtedy, kiedy są prawdziwe (mają najwyższą wartość prawdziwościową, to jest wartość prawdy), natomiast zdania: A jest B są uznawane, kiedy nie są fałszywe (nie mają najmniejszej wartości, to jest wartości fałszu); stąd zaprzeczenia tych zdań są prawdziwe tylko wtedy, kiedy są one fałszywe.

Wprowadzając funktory uznania: jest konieczne, że q i nie jest wykluczone, że q odpowiednio: □q i ◊q, gdzie q zastępuje dowolne zdania oceniane wielowartościowo, otrzymamy:

$$a \propto \{b\} \leftrightarrow \Box A\ \alpha\ B,$$
$$a \notin \{b\} \leftrightarrow \Box{\sim}A\ \varepsilon\ B,$$

co pozwala, uwzględniając, że $\sim\Box\sim q \leftrightarrow \Diamond q$, ostatecznie zapisać te formuły:

$$a \propto \{b\} \leftrightarrow \Box A\ \alpha\ B,$$
$$a \in \{b\} \leftrightarrow \Diamond A\ \varepsilon\ B.$$

Nazwę przedmiotu (będącego zbiorem): być B-em skracamy dalej do: εB niezależnie od tego, czy czasownik: być rozumiemy w liczbie pojedynczej jako: jest B-em, czy też w liczbie mnogiej jako: są B-ami. Dzięki temu możemy zdefiniować najważniejszą relację między zbiorami, nazywaną relacją inkluzji:

$$\{a\} \subseteq \{b\} \leftrightarrow \varepsilon A \leq \varepsilon B,$$

gdzie zbiory traktujemy jak liczby (ilości); zbiór o nazwie być A-em to liczba elementów w zbiorze, a także i w kolekcji, A-ów, natomiast zbiór o nazwie być B-em to liczba elementów w zbiorze, a także i w kolekcji, B-ów. Zbiór A-ów jest zawarty w zbiorze B-ów zawsze i tylko wtedy, kiedy liczba A-ów poprzedza liczbę B-ów w sensie relacji częściowego porządku (zwrotnej, antysymetrycznej i przechodniej), zgodnie z teorią relacji. Liczby utożsamiane przez nas ze zbiorami, oznaczające ilości przedmiotów, uwzględniają zarazem jakości tych przedmiotów; tak rozumiane zbiory pozwalają nam „zobaczyć" liczby. Jeszcze raz przypominamy, że po lewej stronie ostatniej równoważności mamy rysunki (symbole) liczb, a po prawej stronie ich nazwy.

Reasumując, nienależenie dystrybutywne i należenie kolektywne do zbioru wyrażamy odpowiednio prawdziwymi zdaniami: A nie jest B oraz A są B. Ponieważ element jest zawsze kolekcją (niewłaściwą), to ze zdania: nie jest wykluczone, że A jest B wynika zdanie: (z konieczności albo wszystkie) A są B. Jeśli ponadto uznamy, że rysunki ułatwiające rozumienie (jak na przykład w geometrii) są zbędne, to, przez analogię do geometrii, symbolikę przedmiotów w teorii zbiorów można także potraktować jako nadmiarową (choć niewątpliwie przydatną w nauczaniu tej teorii).

Interpretacja zbiorów jako liczb (ilości)

Niech M = E = 3; model przedmiotowo-językowy dyskursu w tym przypadku zapisujemy:

e2 e1 e0 e-∞,
N4 N2 N1 N0.

Mamy wobec tego L = 15 kwali (l = 1, 2, 3, ... 15), N = 4 kwanty, ilość: I = M = E = 3 i dokładnie tyleż elementów o symbolach i nazwach: e2, N4; e1, N2; e0, N1, tworzących dziedzinę dyskursu: e2 e1 e0 (e-∞), X = N4 + N2 + N1 (+ N0) = N7, oraz jeden symbol i nazwę przedmiotu, którego nie ma, tworzącego jego przeciwdziedzinę: Θ = N8, ale 8 mod 2^M równe jest zeru, stąd: N8 = N0. Można utworzyć i rozważać także pozostałe przedmioty: e2 e1, N6; e2 e0, N5; e1 e0, N3. Określmy wszystkie osiem jakości: j oraz ilości: i = m według podanych wcześniej wzorów:

$$j = l \bmod 2^M = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;\ J = 2^M - 1 = 2^3 - 1 = 7;$$

$$m = w(j) = 0(0), 1(1), 1(2), 2(3), 1(4), 2(5), 2(6), 3(7).$$

Widzimy, że musimy w tym dyskursie uwzględnić osiem liczb (jedno zero, trzy jedynki, trzy dwójki i jedną trójkę), od zera do trójki, będących wagami ośmiu jakości, albo wartości prawdziwościowych. „Zobaczmy” te liczby w postaci (rysunków) zbiorów, a więc symboli przedmiotów elementarnych typu pierwszego (zgodnie z teorią typów indeks górny jest równy jedności, a nie zeru; zera dotychczas opuszczaliśmy przy e^0i) o symbolu: e^1j oraz nazwie: εNj = $N^1 2^j$:

$e^1 7$ = {e2 e1 e0 e-∞} = }trójka z wartości prawdziwościowej 7{ = }3_7{ = }εN7{ =}$N^1 128${,
$e^1 6$ = {e2 e1 e-∞} = }dwójka z wartości prawdziwościowej 6{ = }2_6{ = }εN6{ = }$N^1 64${,
$e^1 5$ = {e2 e0 e-∞} = }dwójka z wartości prawdziwościowej 5{ = }2_5{ = }εN5{ = }$N^1 32${,
$e^1 4$ = {e2 e-∞} = }jedynka z wartości prawdziwościowej 4{ = }1_4{ = }εN4{ = }$N^1 16${,
$e^1 3$ = { e1 e0 e-∞} = }dwójka z wartości prawdziwościowej 3{ = }2_3{ = }εN3{ = }$N^1 8${,
$e^1 2$ = { e1 e-∞} = }jedynka z wartości prawdziwościowej 2{ = }1_2{ = }εN2{ = }$N^1 4${,
$e^1 1$ = { e0 e-∞} = }jedynka z wartości prawdziwościowej 1{ = }1_1{ = }εN1{ = }$N^1 2${,
$e^1 0$ = { e-∞} = }zero z wartości prawdziwościowej 0{ = }0_0{ = }εN0{ = }$N^1 1${.

Wprowadzona notacja pozwala odróżniać symbole od nazw; $e^1 7$ = {e2 e1 e0 e-∞} jest tutaj symbolem zbioru pełnego ($7 = 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-\infty}$) z nazwą przysługującą elementowi typu pierwszego; oto równorzędne nazwy tego zbioru: trójka z wartości prawdziwościowej 7, 3_7 (zamiast siódemkę umieszczać w nawiasach okrągłych, piszemy ją jako indeks przy trójce), εN7 (być N7) oraz $N^1 128 = N^1 2^7$ jako regularna nazwa przedmiotu elementarnego: $e^1 7$. Zbiorem pustym jest zbiór: $e^1 0$ = {e-∞} o nazwach: zero z wartości prawdziwościowej 0, 0_0, lub εN0 = $N^1 1$; ostatnia nazwa wskazuje na istnienie zbioru pustego, skoro elementem typu pierwszego, którego nie ma jest przedmiot o symbolu: e^1-∞ i nazwie: $N^1 0$. Analiza zapisu pozostałych, zarazem niepełnych i niepustych, zbiorów pokazuje, że każdy zbiór zawiera przedmiot typu zerowego, którego nie ma: e-∞; nie oznacza to jednak, że przedmiot ten należy do zbioru pustego: e-∞ ∉ {e-∞} ↔ ~N0 ε N0, co jest zgodne z zasadą: przedmiot (o nazwie): nic nie należy do zbioru pustego, skoro nic nie jest niczym. Trzeba jednak pamiętać, że to „nic” jest elementem każdego zbioru niepustego, chociaż zbiór pusty też konstytuuje. Zauważmy także, że nazwa liczby w tym dyskursie to: $N^1 255 = N^1 128 + N^1 64 + N^1 32 + N^1 16 + N^1 8 + N^1 4 + N^1 2 + N^1 1$ (+ $N^1 0$); nazwa trójki: $N^1 128$; nazwa dwójki: $N^1 104$; nazwa jedynki: $N^1 22$; nazwa zera: $N^1 1$, natomiast nazwa liczby, której nie ma to: $N^1 0$.

Dla dyskursu z M = E = 4 elementami mamy, jak łatwo sprawdzić, szesnaście liczb (jedno zero, cztery jedynki, sześć dwójek, cztery trójki i jedną czwórkę):
$e^1$15 = {e3 e2 e1 e0 e-∞} = }czwórka z wartości 15{ = }4_{15}{ = }εN15{ =}$N^1$32768{,
$e^1$14 = {e3 e2 e1 e-∞} = }trójka z wartości 14{ = }3_{14}{ = }εN14{ = }$N^1$16384{,
$e^1$13 = {e3 e2 e0 e-∞} = }trójka z wartości 13{ = }3_{13}{ = }εN13{ = }$N^1$8192{,
$e^1$12 = {e3 e2 e-∞} = }dwójka z wartości 12{ = }2_{12}{ = }εN12{ = }$N^1$4096{,
$e^1$11 = {e3 e1 e0 e-∞} = }trójka z wartości 11{ = }3_{11}{ = }εN11{ = }$N^1$2048{,
$e^1$10 = {e3 e1 e-∞} = }dwójka z wartości 10{ = }2_{10}{ = }εN10{ = }$N^1$1024{,
$e^1$9 = {e3 e0 e-∞} = }dwójka z wartości 9{ = }2_9{ = }εN9{ = }$N^1$512{,
$e^1$8 = {e3 e-∞} = }jedynka z wartości 8{ = }1_8{ = }εN8{ = }$N^1$256{,
$e^1$7 = { e2 e1 e0 e-∞} = }trójka z wartości 7{ = }3_7{ = }εN7{ =}$N^1$128{,
$e^1$6 = { e2 e1 e-∞} = }dwójka z wartości 6{ = }2_6{ = }εN6{ = }$N^1$64{,
$e^1$5 = { e2 e0 e-∞} = }dwójka z wartości 5{ = }2_5{ = }εN5{ = }$N^1$32{,
$e^1$4 = { e2 e-∞} = }jedynka z wartości 4{ = }1_4{ = }εN4{ = }$N^1$16{,
$e^1$3 = { e1 e0 e-∞} = }dwójka z wartości 3{ = }2_3{ = }εN3{ = }$N^1$8{,
$e^1$2 = { e1 e-∞} = }jedynka z wartości 2{ = }1_2{ = }εN2{ = }$N^1$4{,
$e^1$1 = { e0 e-∞} = }jedynka z wartości 1{ = }1_1{ = }εN1{ = }$N^1$2{,
$e^1$0 = { e-∞} = }zero z wartości 0{ = }0_0{ = }εN0{ = }$N^1$1{.
Nazwa liczby w dyskursie M = E = 4 to: $N^1$65535 = $N^1$32768 + $N^1$16384 + $N^1$8192 + $N^1$4096 + $N^1$2048 + $N^1$1024 + $N^1$512 + $N^1$256 + $N^1$128 + $N^1$64 + $N^1$32 + $N^1$16 + $N^1$8 + $N^1$4 + $N^1$2 + $N^1$1 (+ $N^1$0), natomiast jej symbol to: $e^1$15 $e^1$14 $e^1$13 $e^1$12 $e^1$11 $e^1$10 $e^1$9 $e^1$8 $e^1$7 $e^1$6 $e^1$5 $e^1$4 $e^1$3 $e^1$2 $e^1$1 $e^1$0 (e^1-∞); liczba, której nie ma jest liczbą, podobnie jak przedmiot, którego nie ma jest przedmiotem.

Reasumując, pokazaliśmy, że przedmioty, jakimi są zbiory, mogą być interpretowane jako liczby. Zwróćmy jednak uwagę, że operacje sumowania na tak zrozumiale zinterpretowanych liczbach prowadzą na pierwszy rzut oka do zaskakujących wniosków; w dyskursie z M = E = 3 przedmiotami dwójka zsumowana z dwójką nigdy nie da czwórki, bo nie ma aż tylu przedmiotów. Mamy wobec tego model dyskursu, w którym dwa plus dwa nie może dać czwórki, a więc nie może być (zawsze) prawdą, że dwa plus dwa jest cztery; innymi słowy twierdzenia, że dwa plus dwa jest cztery, nie da się w ogóle, jako prawdy, kiedykolwiek dowieść (uzasadnić).

Przysłowiowe dwa plus dwa, jeśli nie wskażemy, które dwójki podlegają sumowaniu, daje z równym prawdopodobieństwem w dyskursie trójelementowym wynik dwa jak i trzy:
$2_3 + 2_3 = 2_3$, $2_5 + 2_5 = 2_5$, $2_6 + 2_6 = 2_6$, $2_3 + 2_5 = (1_2 + 1_1) + (1_4 + 1_1) = (1_4 + 1_2 + 1_1) = 3_7$, podobnie $2_3 + 2_6 = 3_7$, $2_5 + 2_6 = 3_7$, co kończy uzasadnienie tego twierdzenia.

Pierwsi uwagę na niedoskonałość sumowania liczb zwrócili Chińczycy, Gongsun Long, trzy wieki przed naszą erą, bowiem jeden plus jeden nie może dawać dwóch, jeśli ta jedynka jest identyczna sama z sobą. W Europie podobne odkrycie zostało dokonane, nieco później, przez George'a Boole'a; w jego algebrze 1 + 1 = 1 (jeśli 1 + 1 = 2, to nieprawda, że 1 = 1).

Wyjaśnienie, tych wydawałoby się dziwactw, jest proste; aksjomatyka, odpowiedzialna za nasze przekonanie, że dwa plus dwa jest zawsze cztery, nie do końca precyzuje operandy. Geometryczne pewniki Euklidesa nie gwarantują, że jednoznacznie rozumiemy tak zwane pojęcia pierwotne: punkt, prostą czy płaszczyznę, co wypłynęło na początku XIX wieku, generując geometrie nieeuklidesowe; nie bardzo rozumiemy też, co tak naprawdę przedstawiają sobą liczby opisane przez aksjomaty. Dzisiaj tego rodzaju rezultaty nikogo już nie dziwią w dowolnej dziedzinie matematyki; przypomnijmy tu również, że dla teorii mnogości, uważanej za fundamentalną dla matematyki, w tym i dla rozumienia pojęcia liczby, nikomu jak dotąd (rok 2013/22) nie udało się przeprowadzić dowodu niesprzeczności.

Warsztaty/Ćwiczenia 3: Zbiory w zadaniach

Zadanie 1.3.

Omówić symbole przedmiotów (kolekcji i zbiorów) i nazwy odpowiadające tym przedmiotom w wybranym dyskursie.

Odpowiedź: Przedmioty, czyli kolekcje zostały podzielone na przedmioty elementarne (co najwyżej jednostkowe, kolekcje niewłaściwe) nazywane też krótko elementami (w tym przedmioty zerowe, których nie ma) oraz na przedmioty nieelementarne (więcej niż jednostkowe, kolekcje właściwe) nazywane też przedmiotami mnogimi, przy czym zasady jednostkowienia uzależnione są od ustaleń stron dyskursu. Do rozważań wybierzmy dyskurs czteroelementowy (M = E = 4), jak w przypadku dyskursu o poznaniu; przedmiotami elementarnymi, czyli elementami będą: e2, e3, e1, e0 oraz e-∞; ten ostatni jest przykładem przedmiotu, którego nie ma, natomiast przedmioty mnogie w tym dyskursie reprezentowane są przez symbole (ciągi symboli), np.: e3e1e2, e1e3, e2e1, e0e1, e3e2, e2e0, e3e0. Oczywiście do każdego z przedmiotów poza zerowym można dodać przedmiot: e-∞, którego nie ma, to jest przykładowo: e2e-∞, e-∞e3, e1e-∞, e-∞e0, e3e-∞e1e2, e1e3e-∞, e-∞e2e1, e0e1e-∞, e-∞e3e2, e2e-∞e0, e3e0e-∞, bo nie zmienia to liczby przedmiotów; nie będziemy jednak uzupełniać symbolu e-∞ dla przedmiotu, którego nie ma: e-∞e-∞, bowiem nie chcielibyśmy, aby w ciągu symboli (symbolu) pojawiały się identyczne ich egzemplarze.

Przedmioty posiadają oprócz symboli również i swoje nazwy; nazwę: Nj, którą w dyskursie można orzec o przedmiocie, reprezentowanym przez symbol eiw...ei2ei1 (bez e-∞), obliczamy według wzoru: $j = 2^{iw} + ... +2^{i2} + 2^{i1}$, gdzie: w jest wagą jakości: j, a więc liczbą przedmiotów reprezentowanych przez dany ciąg symboli; na przykład: symbolowi przedmiotu e3e2 odpowiada nazwa N12, skoro: $j = 2^{i2} + 2^{i1} = 2^3 + 2^2 = 12$.

Dla wszystkich bez wyjątku przedmiotów w dyskursie czteroelementowym związki przedmiotów (reprezentowanych przez symbole) z nazwami są następujące:

e3 e2 e1 e0 e-∞ := }N15{,	skoro:	2^3	$+ 2^2$	$+ 2^1$	$+2^0$	$+ (2^{(-)\infty}) =$	15;
e3 e2 e1 e-∞ := }N14{,	skoro:	2^3	$+ 2^2$	$+ 2^1$		$+ (2^{(-)\infty}) =$	14;
e3 e2 e0 e-∞ := }N13{,	skoro:	2^3	$+ 2^2$		$+2^0$	$+ (2^{(-)\infty}) =$	13;
e3 e2 e-∞ := }N12{,	skoro:	2^3	$+ 2^2$			$+ (2^{(-)\infty}) =$	12;
e3 e1 e0 e-∞ := }N11{,	skoro:	2^3		$+ 2^1$	$+2^0$	$+ (2^{(-)\infty}) =$	11;
e3 e1 e-∞ := }N10{,	skoro:	2^3		$+ 2^1$		$+ (2^{(-)\infty}) =$	10;
e3 e0 e-∞ := } N9{,	skoro:	2^3			$+2^0$	$+ (2^{(-)\infty}) =$	9;
e3 e-∞ := } N8{,	skoro:	2^3				$+ (2^{(-)\infty}) =$	8;
e2 e1 e0 e-∞ := } N7{,	skoro:		2^2	$+ 2^1$	$+2^0$	$+ (2^{(-)\infty}) =$	7;
e2 e1 e-∞ := } N6{,	skoro:		2^2	$+ 2^1$		$+ (2^{(-)\infty}) =$	6;
e2 e0 e-∞ := } N5{,	skoro:		2^2		$+2^0$	$+ (2^{(-)\infty}) =$	5;
e2 e-∞ := } N4{,	skoro:		2^2			$+ (2^{(-)\infty}) =$	4;
e1 e0 e-∞ := } N3{,	skoro:			$+ 2^1$	$+2^0$	$+ (2^{(-)\infty}) =$	3;
e1 e-∞ := } N2{,	skoro:			$+ 2^1$		$+ (2^{(-)\infty}) =$	2;
e0 e-∞ := } N1{,	skoro:				$+2^0$	$+ (2^{(-)\infty}) =$	1;
e-∞ := } N0{.	skoro:					$+ (2^{(-)\infty}) =$	0.

Tylko w przypadku przedmiotów jednostkowych, kiedy jest dokładnie jeden przedmiot o nazwie Nj, czyli tylko w przypadku przedmiotów z wagą jednostkową o nazwach:

}N8{ = e3 e(-)∞, }N4{ = e2 e(-)∞, }N2{ = e1 e(-)∞, }N1{ = e0 e(-)∞

możemy znak podobieństwa (:=) zastąpić znakiem identyczności (=).

Aby uzyskać z kolekcji zbiory, czyli przedmioty typu o jeden wyższego, a więc po zerowym typu pierwszego, z symbolami: e^1j i nazwami: N^12^j, zgodnie z teorią typów, musimy symbole wszystkich przedmiotów (kolekcji) objąć nawiasami klamrowymi:

$e^1 15 = \{e3\ e2\ e1\ e0\ e\text{-}\infty\} = \{\}N15\{\} = \}\varepsilon N15\{ = \}N^1 2^{15}\{ = \}N^1 32768\{,$
$e^1 14 = \{e3\ e2\ e1\quad e\text{-}\infty\} = \{\}N14\{\} = \}\varepsilon N14\{ = \}N^1 2^{14}\{ = \}N^1 16384\{,$
$e^1 13 = \{e3\ e2\quad e0\ e\text{-}\infty\} = \{\}N13\{\} = \}\varepsilon N13\{ = \}N^1 2^{13}\{ = \}N^1 8192\{,$
$e^1 12 = \{e3\ e2\qquad e\text{-}\infty\} = \{\}N12\{\} = \}\varepsilon N12\{ = \}N^1 2^{12}\{ = \}N^1 4096\{,$
$e^1 11 = \{e3\quad e1\ e0\ e\text{-}\infty\} = \{\}N11\{\} = \}\varepsilon N11\{ = \}N^1 2^{11}\{ = \}N^1 2048\{,$
$e^1 10 = \{e3\quad e1\quad e\text{-}\infty\} = \{\}N10\{\} = \}\varepsilon N10\{ = \}N^1 2^{10}\{ = \}N^1 1024\{,$
$e^1 9 = \{e3\qquad e0\ e\text{-}\infty\} = \{\}N9\{\} = \}\varepsilon N9\{ = \}N^1 2^{9}\{ = \}N^1 512\{,$
$e^1 8 = \{e3\qquad\quad e\text{-}\infty\} = \{\}N8\{\} = \}\varepsilon N8\{ = \}N^1 2^{8}\{ = \}N^1 256\{,$
$e^1 7 = \{\quad e2\ e1\ e0\ e\text{-}\infty\} = \{\}N7\{\} = \}\varepsilon N7\{ =\}N^1 2^{7}\{ = \}N^1 128\{,$
$e^1 6 = \{\quad e2\ e1\quad e\text{-}\infty\} = \{\}N6\{\} = \}\varepsilon N6\{ = \}N^1 2^{6}\{ = \}N^1 64\{,$
$e^1 5 = \{\quad e2\quad e0\ e\text{-}\infty\} = \{\}N5\{\} = \}\varepsilon N5\{ = \}N^1 2^{5}\{ = \}N^1 32\{,$
$e^1 4 = \{\quad e2\qquad e\text{-}\infty\} = \{\}N4\{\} = \}\varepsilon N4\{ = \}N^1 2^{4}\{ = \}N^1 16\{,$
$e^1 3 = \{\qquad e1\ e0\ e\text{-}\infty\} = \{\}N3\{\} = \}\varepsilon N3\{ = \}N^1 2^{3}\{ = \}N^1 8\{,$
$e^1 2 = \{\qquad e1\quad e\text{-}\infty\} = \{\}N2\{\} = \}\varepsilon N2\{ = \}N^1 2^{2}\{ = \}N^1 4\{,$
$e^1 1 = \{\qquad\quad e0\ e\text{-}\infty\} = \{\}N1\{\} = \}\varepsilon N1\{ = \}N^1 2^{1}\{ = \}N^1 2\{,$
$e^1 0 = \{\qquad\qquad e\text{-}\infty\} = \{\}N0\{\} = \}\varepsilon N0\{ = \}N^1 2^{0}\{ = \}N^1 1\{.$

W tym przypadku, a są tutaj wyłącznie przedmioty jednostkowe o wadze równej jeden, bez wyjątku możemy stosować znak identyczności (=) zamiast znaku podobieństwa (:=), a więc inaczej niż poprzednio, kiedy w większości przypadków należało stosować wyłącznie znak podobieństwa, a nie identyczności. Jednostkowość przedmiotów wskazuje tutaj ich nazwa, będąca zawsze całkowitą nieujemną potęgą dwójki. Brak jest jednak dotąd nieokreślonej potęgi dwójki: 2^{∞} = $2^{-\infty}$ = 0, czyli nazwy pustej: $N^1 0$ ($N^1 2^{(-)\infty}$, gdzie $2^{(-)\infty}$ = 0) i odpowiadającego jej symbolu przedmiotu zerowego typu pierwszego: $e^1(-)\infty$; jest to zbiór, którego nie ma interpretowany jako liczba nieokreślona: ∞, $-\infty$ lub ogólnie $(-)\infty$. Na koniec przypomnijmy, że przykładowo wyrażenie (występujące tu w roli symbolu, a więc rysunku): $\}\varepsilon N13\{$ odczytujemy: przedmiot o nazwie: być N13 (lub bycie en trzynaście).

Zadanie 2.3.
Zinterpretować zbiory, czyli przedmioty typu pierwszego, jako liczby oraz podać ich nazwy.
Odpowiedź: W dyskursie czteroelementowym mamy:

$e^1 15 = \{e3\ e2\ e1\ e0\ e\text{-}\infty\} = \}$czwórka z wartości 15$\{ = \}4_{15}\{ = \}N^1 32768\{,$
$e^1 14 = \{e3\ e2\ e1\quad e\text{-}\infty\} = \}$trójka z wartości 14$\{ = \}3_{14}\{ = \}N^1 16384\{,$
$e^1 13 = \{e3\ e2\quad e0\ e\text{-}\infty\} = \}$trójka z wartości 13$\{ = \}3_{13}\{ = \}N^1 8192\{,$
$e^1 12 = \{e3\ e2\qquad e\text{-}\infty\} = \}$dwójka z wartości 12$\{ = \}2_{12}\{ = \}N^1 4096\{,$
$e^1 11 = \{e3\quad e1\ e0\ e\text{-}\infty\} = \}$trójka z wartości 11$\{ = \}3_{11}\{ = \}N^1 2048\{,$
$e^1 10 = \{e3\quad e1\quad e\text{-}\infty\} = \}$dwójka z wartości 10$\{ = \}2_{10}\{ = \}N^1 1024\{,$
$e^1 9 = \{e3\qquad e0\ e\text{-}\infty\} = \}$dwójka z wartości 9$\{ = \}2_{9}\{ = \}N^1 512\{,$
$e^1 8 = \{e3\qquad\quad e\text{-}\infty\} = \}$jedynka z wartości 8$\{ = \}1_{8}\{ = \}N^1 256\{,$
$e^1 7 = \{\quad e2\ e1\ e0\ e\text{-}\infty\} = \}$trójka z wartości 7$\{ = \}3_{7}\{ = \}N^1 128\{,$
$e^1 6 = \{\quad e2\ e1\quad e\text{-}\infty\} = \}$dwójka z wartości 6$\{ = \}2_{6}\{ = \}N^1 64\{,$
$e^1 5 = \{\quad e2\quad e0\ e\text{-}\infty\} = \}$dwójka z wartości 5$\{ = \}2_{5}\{ = \}N^1 32\{,$
$e^1 4 = \{\quad e2\qquad e\text{-}\infty\} = \}$jedynka z wartości 4$\{ = \}1_{4}\{ = \}N^1 16\{,$
$e^1 3 = \{\qquad e1\ e0\ e\text{-}\infty\} = \}$dwójka z wartości 3$\{ = \}2_{3}\{ = \}N^1 8\{,$
$e^1 2 = \{\qquad e1\quad e\text{-}\infty\} = \}$jedynka z wartości 2$\{ = \}1_{2}\{ = \}N^1 4\{,$
$e^1 1 = \{\qquad\quad e0\ e\text{-}\infty\} = \}$jedynka z wartości 1$\{ = \}1_{1}\{ = \}N^1 2\{,$
$e^1 0 = \{\qquad\qquad e\text{-}\infty\} = \}$zero z wartości 0$\{ = \}0_{0}\{ = \}N^1 1\{.$

Nazwa liczby w dyskursie czteroelementowym (M = E = 4) to:
$N^1 65535 = N^1 32768 + N^1 16384 + N^1 8192 + N^1 4096 + N^1 2048 + N^1 1024 + N^1 512 + N^1 256 + N^1 128 + N^1 64 + N^1 32 + N^1 16 + N^1 8 + N^1 4 + N^1 2 + N^1 1$ $(+ N^1 0)$, natomiast jej symbol:
$e^1 15\ e^1 14\ e^1 13\ e^1 12\ e^1 11\ e^1 10\ e^1 9\ e^1 8\ e^1 7\ e^1 6\ e^1 5\ e^1 4\ e^1 3\ e^1 2\ e^1 1\ e^1 0\ (e^1 -\infty)$;
nazwa liczby, której nie ma, czyli liczby nieokreślonej to: $N^1 0$, natomiast jej symbol: $e^1(-)\infty$; liczba, której nie ma jest liczbą oczywiście, podobnie jak przedmiot, którego nie ma jest przedmiotem (musi nim być, skoro jest przedmiotem (, którego nie ma)).

Sumując kolejno trójki ustalamy w dyskursie czteroelementowym nazwę liczby trzy:
$N^1 26752 = N^1 16384 + N^1 8192 + N^1 2048 + N^1 128$ $(+ N^1 0)$ oraz jej symbol:
$e^1 14\ e^1 13\ e^1 11\ e^1 7\ (e^1 -\infty)$;
sumując kolejno dwójki ustalamy nazwę liczby dwa:
$N^1 5736 = N^1 4096 + N^1 1024 + N^1 512 + N^1 64 + N^1 32 + N^1 8$ $(+ N^1 0)$ oraz jej symbol:
$e^1 12\ e^1 10\ e^1 9\ e^1 6\ e^1 5\ e^1 3\ (e^1 -\infty)$;
sumując kolejno jedynki ustalamy nazwę liczby jeden:
$N^1 278 = N^1 256 + N^1 16 + N^1 4 + N^1 2$ $(+ N^1 0)$ oraz jej symbol:
$e^1 8\ e^1 4\ e^1 2\ e^1 1\ (e^1 -\infty)$;
nazwa zera i czwórki to odpowiednio: $N^1 1$ oraz $N^1 32768$, a ich symbole: $e^1 0$, $e^1 15$.

Zadanie 3.3.

Omówić relacje między przedmiotami (kolekcjami i zbiorami) oraz ich nazwami.

Odpowiedź: Relacje między kolekcjami i zbiorami trzeba osobno rozpatrywać na poziomie przedmiotowym z wykorzystaniem symboli, albo inaczej rysunków, oraz na poziomie językowym wykorzystując nazwy przedmiotów.

Rozpocznijmy od relacji między kolekcjami; najprostszym symbolem służącym do opisu relacji między kolekcjami (o nazwach: A, B), oznaczanymi, zgodnie z umową, małymi literami: a, b, mogą być dwa nawiasy okrągłe użyte na wszystkie cztery sposoby:
a () b dla oznaczenia wyczerpywania w dyskursie kolekcji pełnej przez sumę a plus b;
a)) b dla oznaczenia obejmowania przez kolekcję a kolekcji b;
a ((b dla oznaczenia mieszczenia się kolekcji a w kolekcji b oraz
a)(b dla oznaczenia wyłączania się obu kolekcji, czyli w przypadku, kiedy ich iloczyn (przecięcie) daje przedmiot zerowy. Te cztery wyrażenia są rysunkami.

Znane są już nam relacje między nazwami A, B zdefiniowane jako podrzędność nazwy A względem nazwy B w przypadku, kiedy A są B (A-y są B-ami) oraz nadrzędność nazwy A względem nazwy B, kiedy to B są A (B-y są A-ami lub nie-A-y są nie-B-ami (A′ są B′)).

Relacje między nazwami odpowiadające wzajemnie jednoznacznie relacjom między kolekcjami będą wobec tego następujące:
A d B dla oznaczenia uzupełniania się do nazwy pełnej sumy nazw: A plus B;
A b B dla oznaczenia nadrzędności nazwy A względem nazwy B;
A a B dla oznaczenia podrzędności nazwy A względem nazwy B oraz
A g B dla oznaczenia rozłączności nazw A i B, kiedy A razy B daje nazwę pustą.

Reasumując, mamy jednoznaczną odpowiedniość między relacjami dotyczącymi kolekcji i relacjami związanymi z ich nazwami:
a () b $\leftrightarrow$ (□) A δ B dla wyczerpywania i uzupełniania,
a)) b $\leftrightarrow$ (□) A β B dla obejmowania i nadrzędności,
a ((b $\leftrightarrow$ (□) A α B dla mieszczenia się i podrzędności oraz
a)(b $\leftrightarrow$ (□) A γ B dla wyłączania i rozłączności odpowiednio.

Pamiętać przy tym należy, że po lewych stronach tych równoważności mamy rysunki, a po prawych – wyrażenia językowe, a każda z tych par relacji wystarcza do opisu pozostałych trzech par; przyjmijmy za podstawową: parę mieszczenia się i podrzędności:

–a ((b ↔ (□) A′ α B dla wyczerpywania i uzupełniania,
–a ((–b ↔ (□) A′ α B′ dla obejmowania i nadrzędności,
a ((b ↔ (□) A α B dla mieszczenia się i podrzędności oraz
a ((–b ↔ (□) A α B′ dla wyłączania i rozłączności odpowiednio.

W ostatniej czwórce ekwiwalencji pojawiają się zaprzeczenia kolekcji i negacje nazw; w skład zaprzeczenia kolekcji wchodzą brakujące symbole z kolekcji pełnej, natomiast zanegowana nazwa posiada jakość (wartość prawdziwościową) równą J – j. Na przykład, zaprzeczeniem kolekcji: e1e3e-∞ o nazwie N10 w epistemicznym dyskursie z czterema elementami będzie: –e1e3e-∞ := e0e2e-∞, a negacją nazwy N10 dla tej kolekcji będzie: N10′, czyli N5, skoro J – j = 15 – 10 = 5.

Kolejnym krokiem są relacje między kolekcjami i zbiorami (należenie kolekcji do zbioru):
–a ∝ { b} ↔ (□) A′ α B dla wyczerpywania kolekcji i uzupełniania nazw,
–a ∝ {–b} ↔ (□) A′ α B′ dla obejmowania kolekcji i nadrzędności nazw,
a ∝ { b} ↔ (□) A α B dla mieszczenia się kolekcji i podrzędności nazw oraz
a ∝ {–b} ↔ (□) A α B′ dla wyłączania się kolekcji i rozłączności nazw odpowiednio.

Szczególnym przypadkiem dla zdania typu A są B, to jest (□)A α B:
a ∝ { b} ↔ (□) A α B, gdzie funktor konieczności (pewności) można pomijać, jest zdanie A jest B, czyli ◊A ε B:
a ∈ {b} ↔ ◊A ε B, gdzie funktora niewykluczania (możliwości) pomijać nie wolno.

Ostatnią do rozpatrzenia jest relacja między zbiorami, czyli przedmiotami elementarnymi (jednostkowymi bez zbioru, którego nie ma) wyższego typu, tworzonymi przez objęcie kolekcji nawiasami zbiorowymi (klamrowymi):
{a} ⊆ {b} ↔ εA ≤ εB,
nazywana relacją inkluzji lub relacją zawierania się zbiorów. Po lewej stronie równoważności występuje rysunek, a po prawej pojawia się, odpowiadające mu wyrażenie językowe w postaci nierówności między liczbami przedmiotów w kolekcji (zbiorze) A (A-ów) i w kolekcji B (zbiorze B-ów). Znamienne jest również to, że i w tym przypadku: zbiór A-ów jest zawarty w zbiorze B-ów zawsze i tylko wtedy, gdy A są B ((□) A α B); należy jednak pamiętać, że relacja inkluzji różni się od relacji mieszczenia tym, że pierwsza zachodzi między zbiorami (przedmiotami elementarnymi wyższego typu – liczbami), druga między kolekcjami, które są tymi liczbami charakteryzowane.

Zadanie 4.3.

Podać wzór na liczbę zdań prawdziwych typu: A jest B w dyskursie epistemicznym.

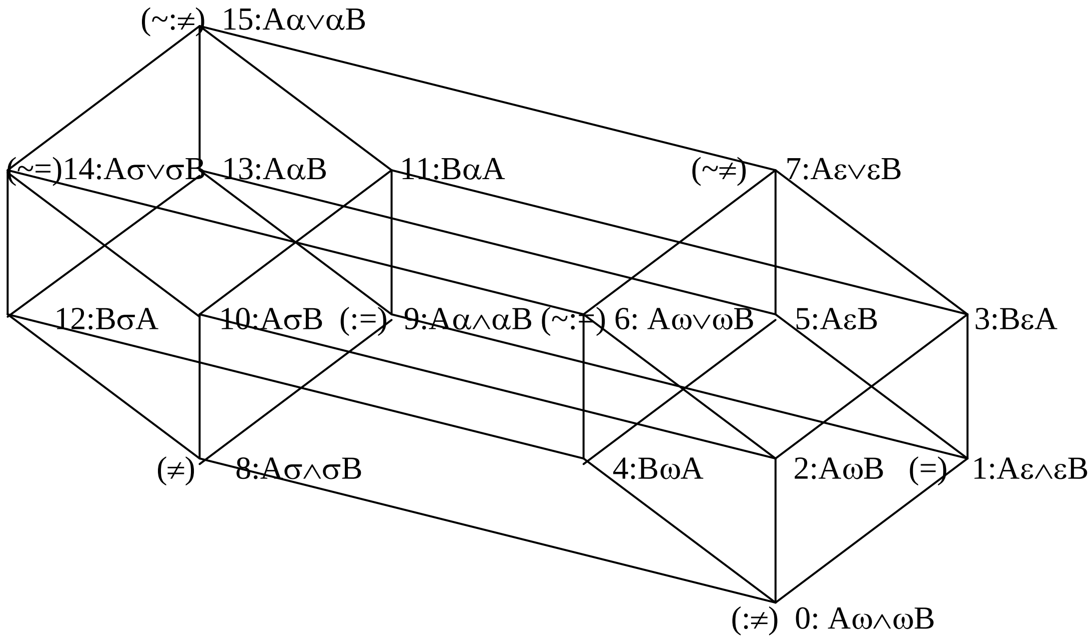
Odpowiedź: Wiemy, że zdanie A jest B, czyli ◊A ε B, jest szczególnym przypadkiem podstawowego zdania: A są B, czyli (□) A α B, których liczba w M elementowym dyskursie epistemicznym jest skończona i daje się precyzyjnie w każdym przypadku ustalić (na przykład, w dyskursie o filozofii jest to 81 zdań prawdziwych typu A-y są B-ami albo w dyskursie o nauce (logice), gdzie wyróżnić można ich 27, podobnie jak przy dyskusji o estetyce, logistyce czy też etyce).

Pokazaliśmy wcześniej (patrz zadanie 5.2.), stosując wzór dwumianowy, że na 4^M możliwych do zapisania zdań typu A są B prawdziwych jest dokładnie (w epistemicznym dyskursie z M = E elementami): 3^M. Wykorzystując dwa pierwsze składniki tego wzoru:
$(^M{}_0)\cdot 2^M + (^M{}_1)\cdot 2^{M-1} + \ldots + (^M{}_m)\cdot 2^{M-m} + \ldots + (^M{}_{M-1})\cdot 2^1 + (^M{}_M)\cdot 2^0 = (2 + 1)^M = 3^M$
pomniejszone o jedność (zdanie N0 jest N0 uznajemy za fałszywe, skoro przedmiot, którego nie ma, czyli przedmiot zerowy nie jest identyczny sam z sobą) można obliczyć, ile zdań prawdziwych typu A jest B daje się utworzyć w tym dyskursie epistemicznym:
$(^M{}_0)\cdot 2^M + (^M{}_1)\cdot 2^{M-1} - 1 = 2^M + M\cdot 2^{M-1} - 1 = (M + 2)\cdot 2^{M-1} - 1.$

Zadanie 5.3.

Przyporządkować węzłom grafu poznania zdania postaci: A są B, A jest B i ich zaprzeczenia, a także wybrane ich koniunkcje i alternatywy.

Odpowiedź: W dyskursie epistemicznym z jednym elementem, gdzie, jako zbędne, nie obowiązują funktory uznawania, mamy: A są B, czyli (□)A α B; A nie są B, czyli (◊)A ω B; A jest B, czyli (◊)A ε B; A nie jest B, czyli (□)A σ B.



W grafie wystąpiło zdanie A jest B (w węźle 5) oraz zdanie A są B (w węźle 13); stąd twierdzenie o zdaniu typu A jest B jako szczególnym przypadku zdania typu A są B:

jeżeli A jest B, to A są B (5 → 13, binarnie: 0101 → 1101).

Ponadto w węzłach: 0, 15, 1, 14, 6, 9, 7 oraz 8 zaznaczono relacje takie jak:
odmienność a :≠ b (:≠) wtw (wtedy i tylko wtedy, kiedy) A nie są B i B nie są A (0:Aω∧ωB),
nieodmienność ~a :≠ b (~:≠) wtw A są B lub B są A (15:Aα∨αB);
identyczność a = b (=) wtw A jest B i B jest A (1:Aε∧εB),
nieidentyczność ~a = b (~=) wtw A nie jest B lub B nie jest A (14:Aσ∨σB);
niepodobieństwo ~a := b (~:=) wtw A nie są B lub B nie są A (6:Aω∨ωB),
podobieństwo a := b (:=) wtw A są B i B są A (9:Aα∧αB);
nieinność ~a ≠ b (~≠) wtw A jest B lub B jest A (7:Aε∨εB),
inność a ≠ b (≠) wtw A nie jest B i B nie jest A (8:Aσ∧σB).

Wprowadziliśmy zdania: A Funkt B, gdzie Funkt jest zaznaczonym w grafie funktorem między nazwami A, B (lub B, A) na prawo od numeru węzła oraz rysunki: a funkt b, gdzie funkt jest zaznaczonym w grafie funktorem między kolekcjami a, b (lub b, a) na lewo od numeru węzła. Prawdziwość zdań (w dyskursie jednoelementowym) w kolejności A-B: N0-N0, N0-N1, N1-N0 oraz N1-N1 odpowiada numerowi węzła; na przykład: w węźle 13 (1101) prawdziwe są trzy zdania AαB oprócz trzeciego: N1αN0; w węźle 9 (1001) prawdziwe są dwa zdania Aα∧αB, pierwsze i czwarte: N0α∧αN0, N1α∧αN1; w węźle 4 (0100) prawdziwe tylko drugie BωA: N1ωN0. W ogólnym przypadku dyskursu epistemicznego i wymaganymi funktorami uznania spełnione są wszystkie relacje w grafie poznania z wyjątkiem gałęzi (krawędzi) o różnicy numerów równej jedności; najlepiej przedstawić to wydzielając z filozofii estetykę (porównaj zadanie 2.1.), gdzie jednostkowe krawędzie łączą ze sobą obie części kostki czterowymiarowej (lewą i prawą).