KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

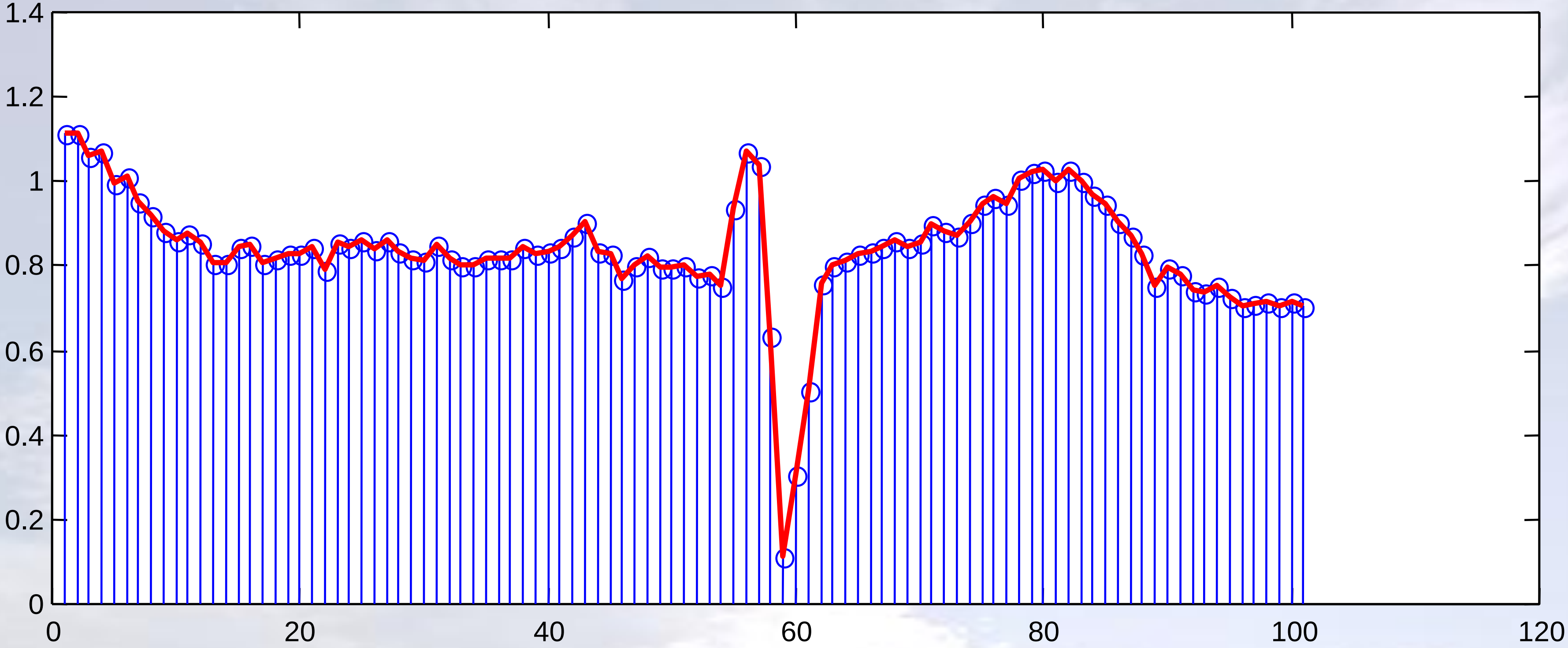
„SIGNAL PROCESSING”

Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego w projekcie pt.

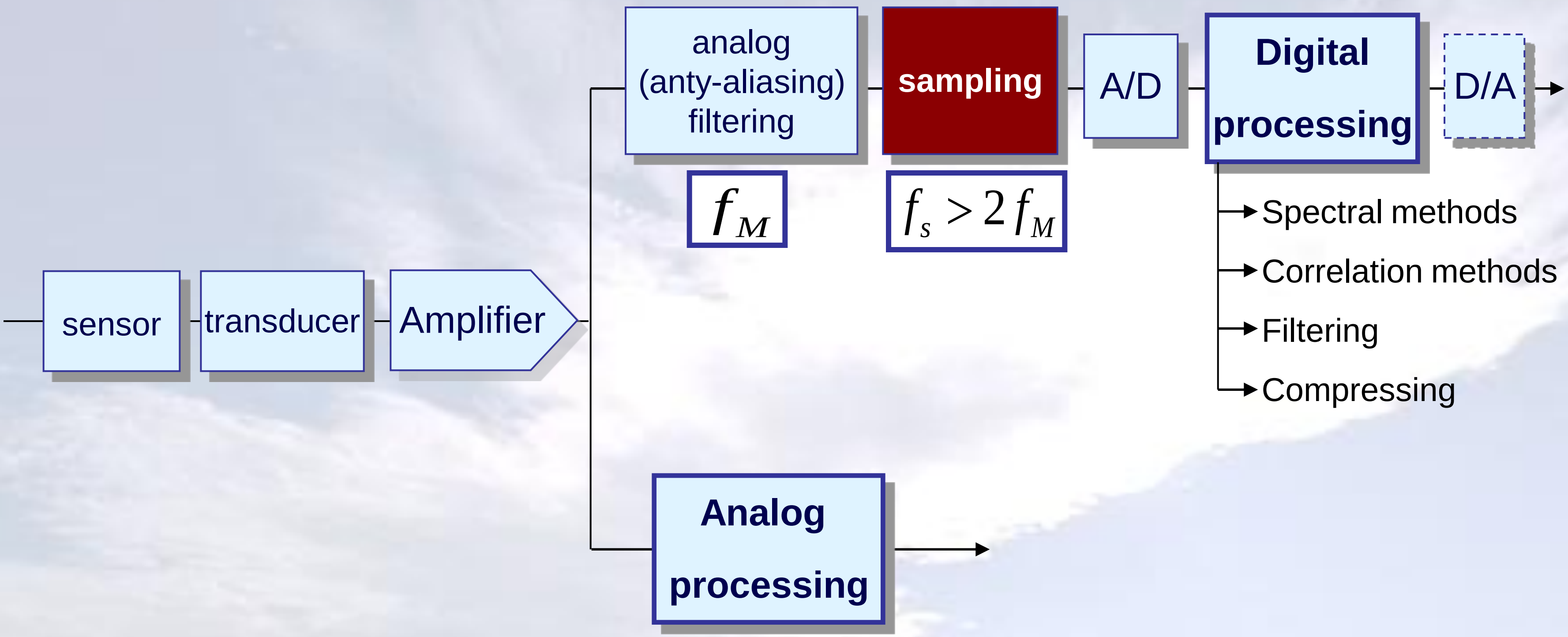
„Innowacyjna dydaktyka bez ograniczeń - zintegrowany rozwój Politechniki Łódzkiej - zarządzanie Uczelnią, nowoczesna oferta edukacyjna i wzmacniania zdolności do zatrudniania osób niepełnosprawnych”

Sampling

Sampling is applied in digital (computer) systems for processing and analysis of signals.



Signal processing



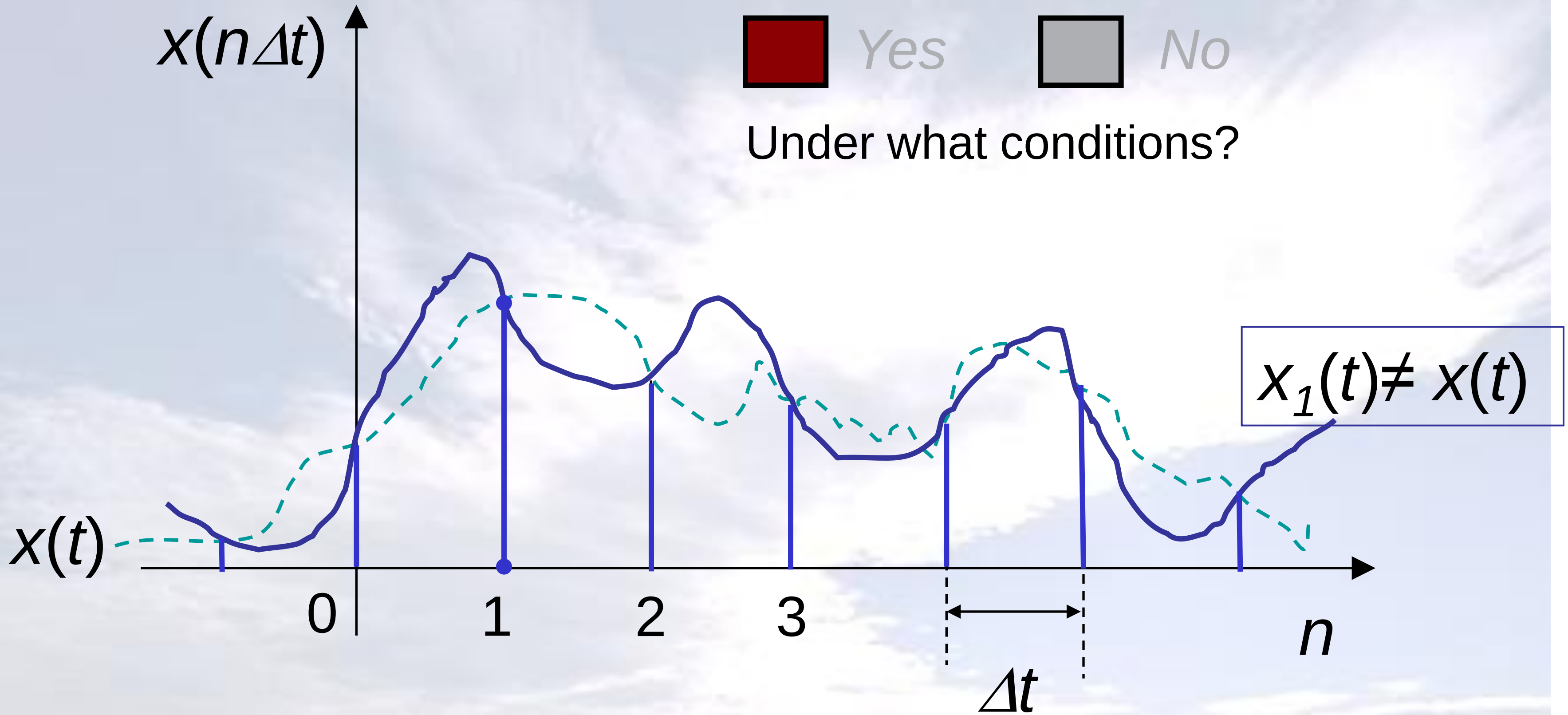
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

How often should the signal be sampled?

- Can the analog and discrete signals be equivalent?

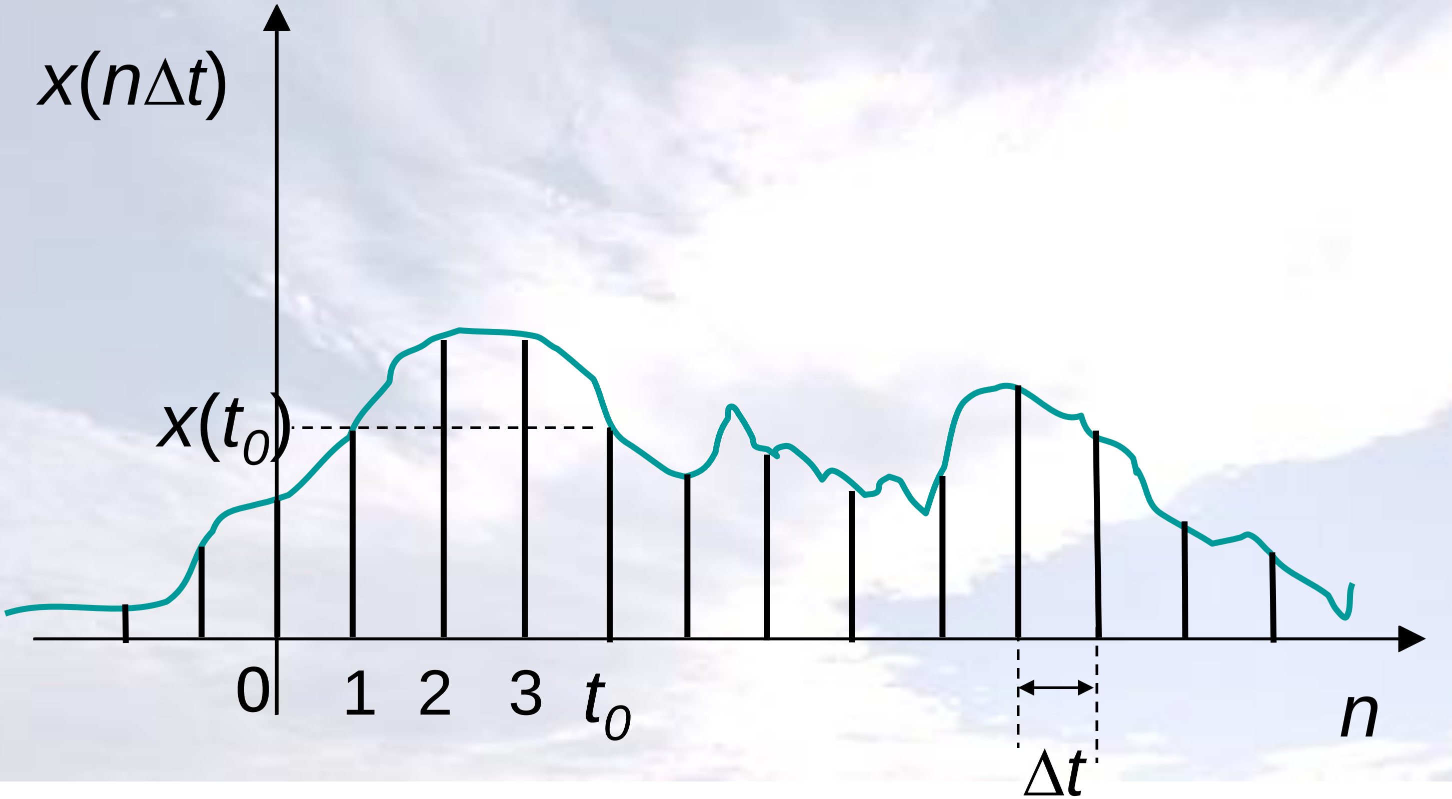
Yes No

Under what conditions?



Sampling

Discrete signal can be obtained by sampling the amplitude of the continuous signal at discrete time instances *nT:*



Sampling

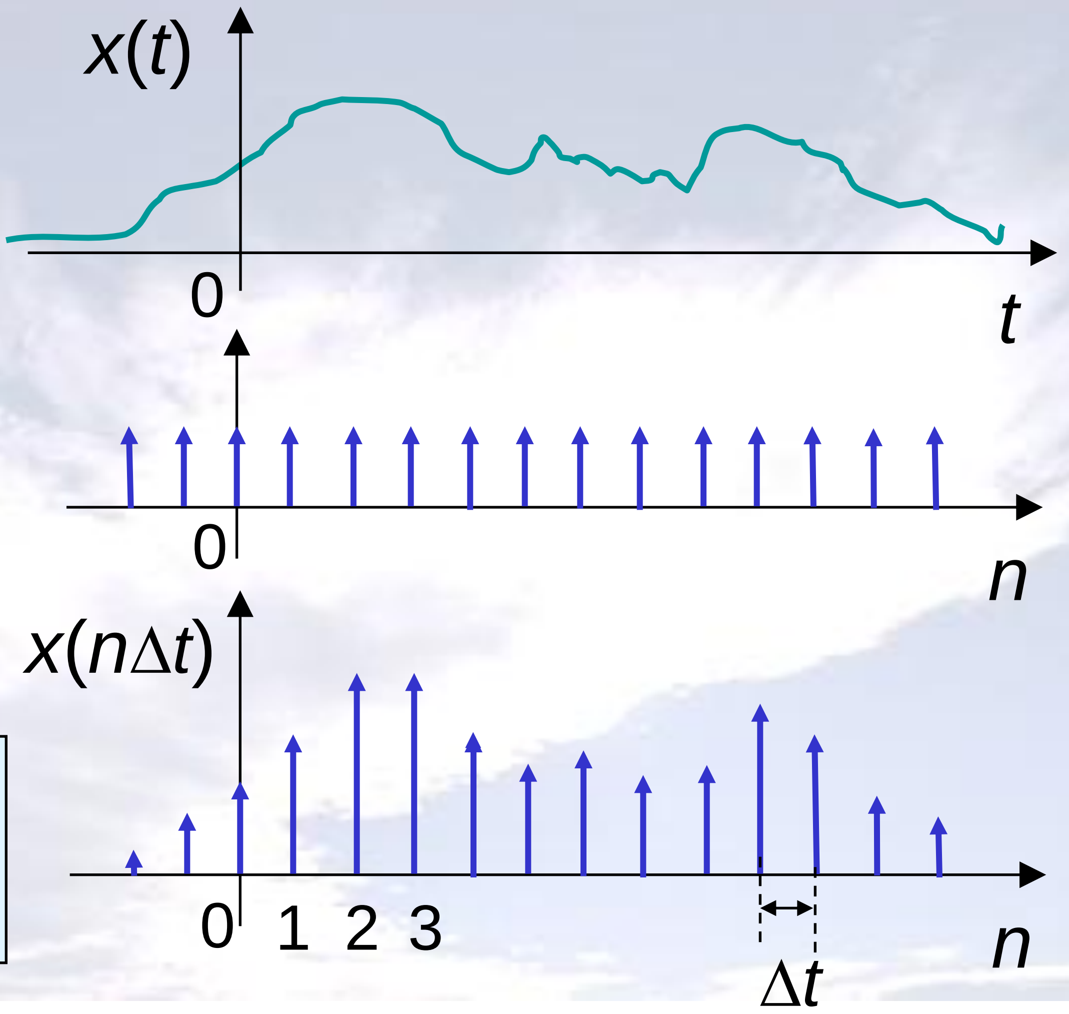
$$\boxed{x(t)}$$

x

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\delta(n-k)}$$

=

$$\boxed{x(n)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}x(t)\delta(n-k)}$$



Properties of Fourier Transform

1. Linearity: $$ax(t)+by(t) \leftrightarrow aX(j\omega)+bY(j\omega)$$

2. Scaling: $$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a>0$$

3. Convolution: $$x(t)*y(t) \leftrightarrow X(j\omega)Y(j\omega)$$

4. **Multiplication:** $$\boxed{x(t)y(t) \leftrightarrow X(j\omega)*Y(j\omega)}$$

5. Parseval's equality: $$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 d\omega =$$

6. Modulation: $$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

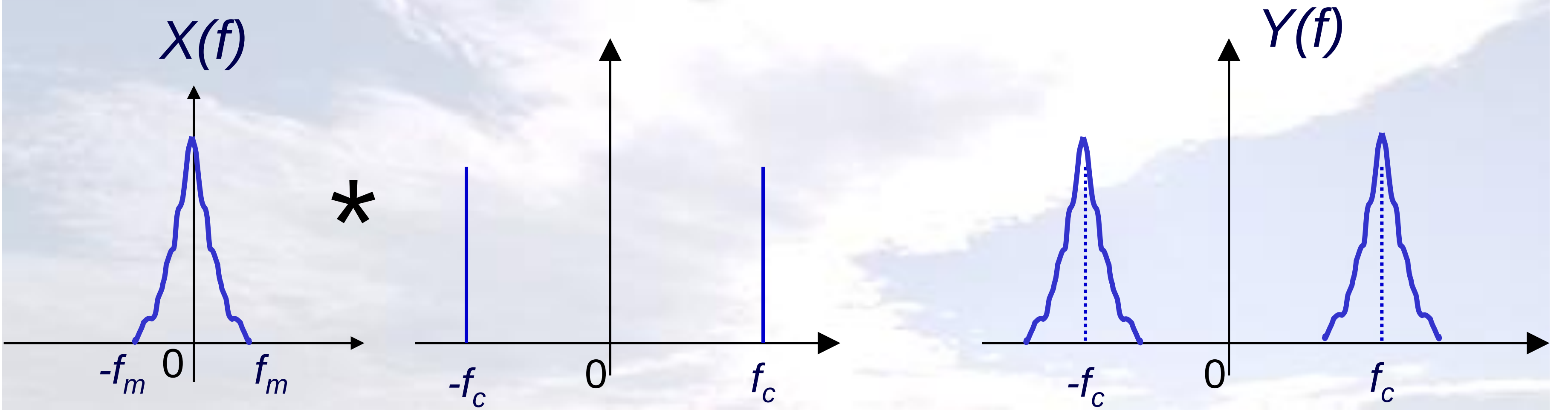
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

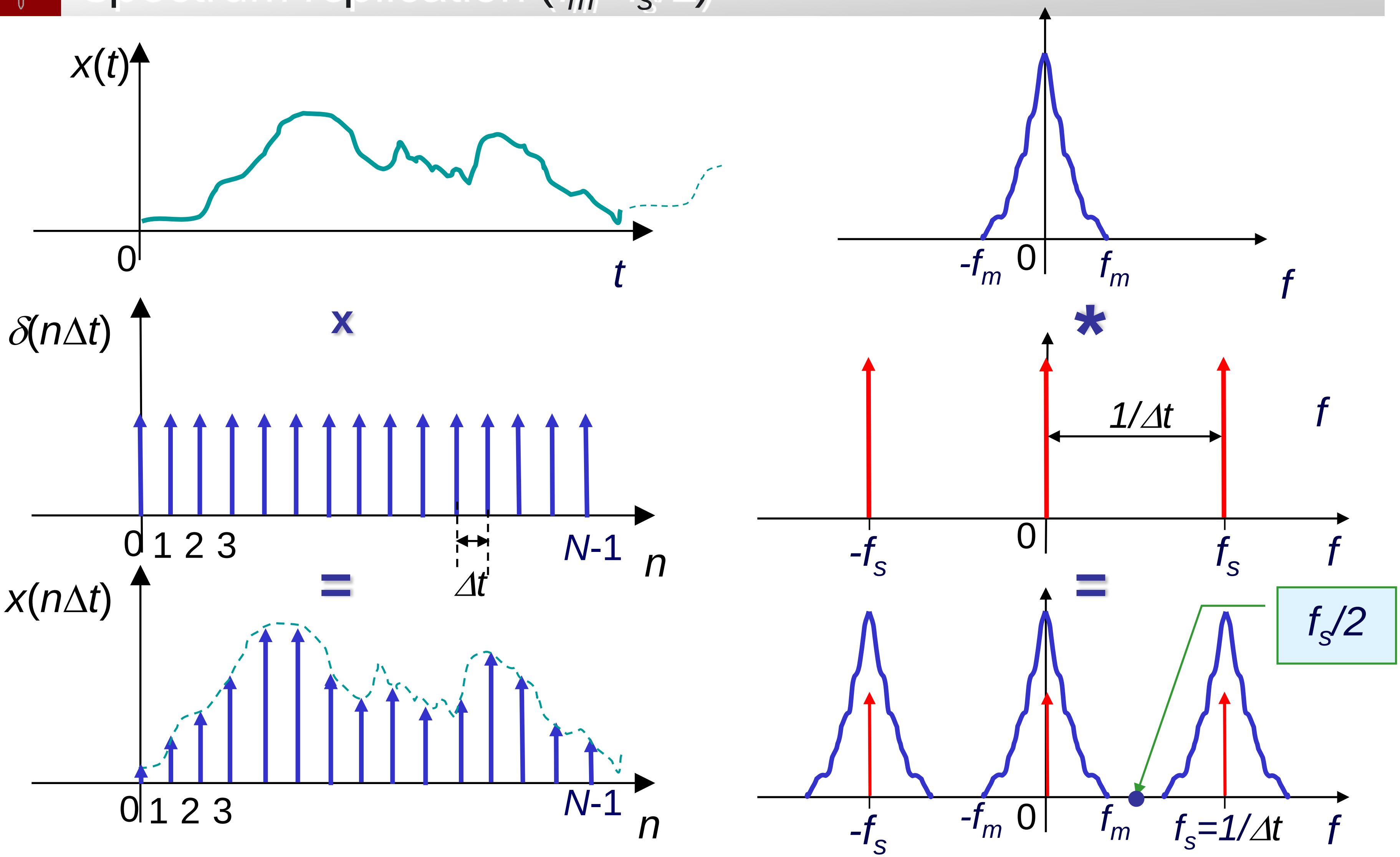
Modulation

$$\Im(\cos 2\pi f_c t) = \Im\left\{\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(f - f_c) + 2\pi\delta(f + f_c)\right)$$

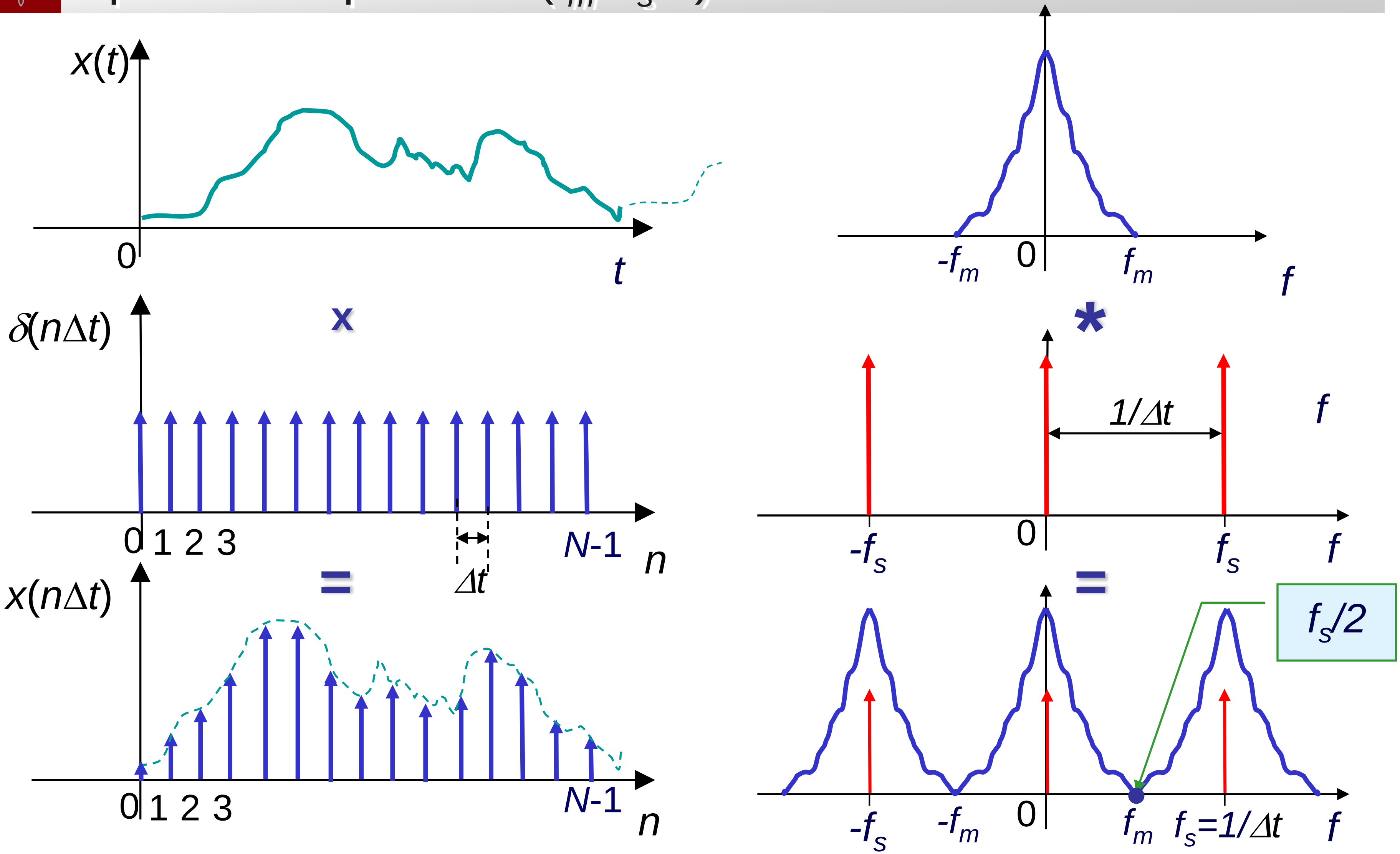
$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow Y(f) = X(f - f_c)$$



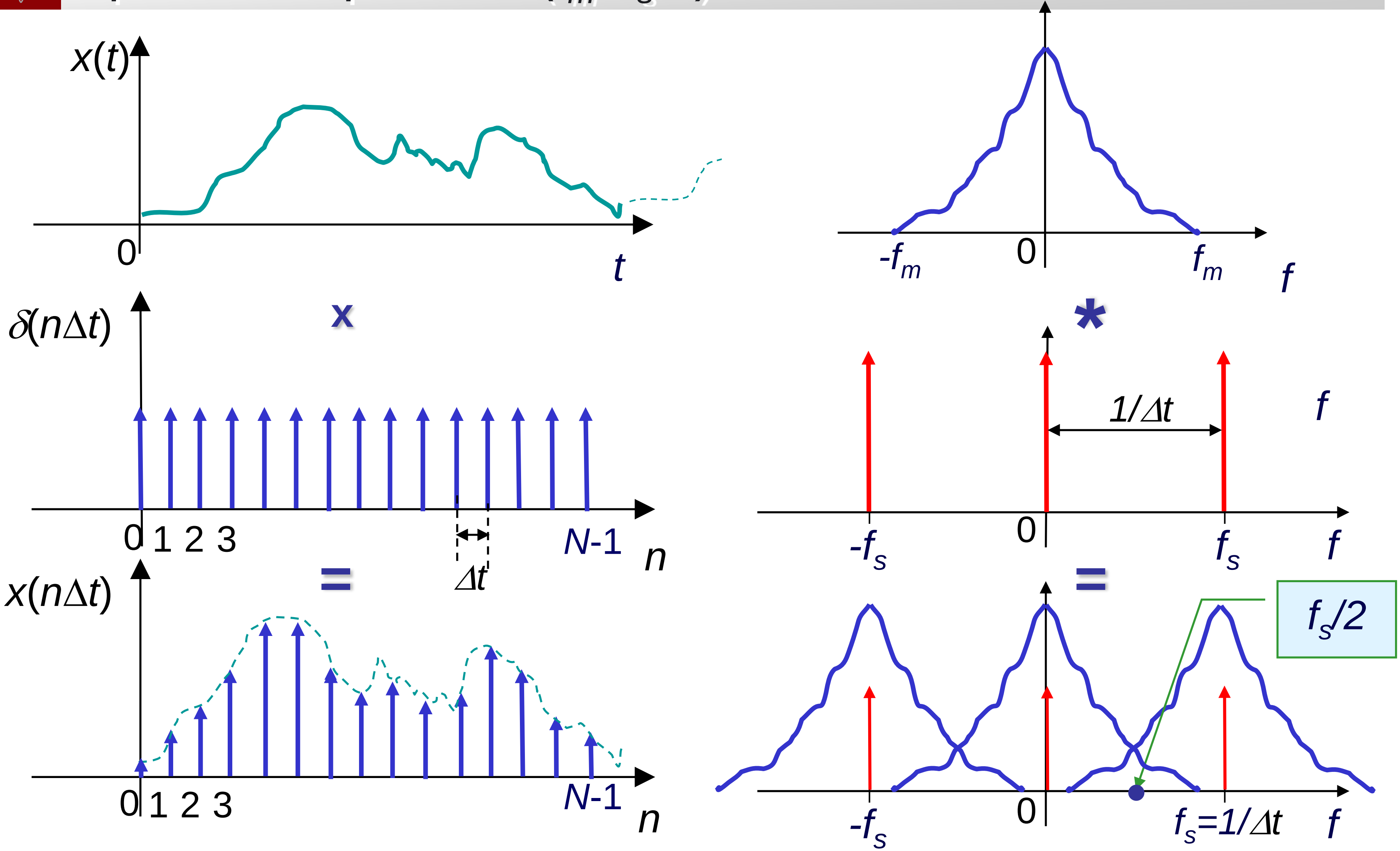
Spectrum replication ($f_m<f_s/2$)



Spectrum replication ($f_m=f_s/2$)



Spectrum replication ($f_m>f_s/2$)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

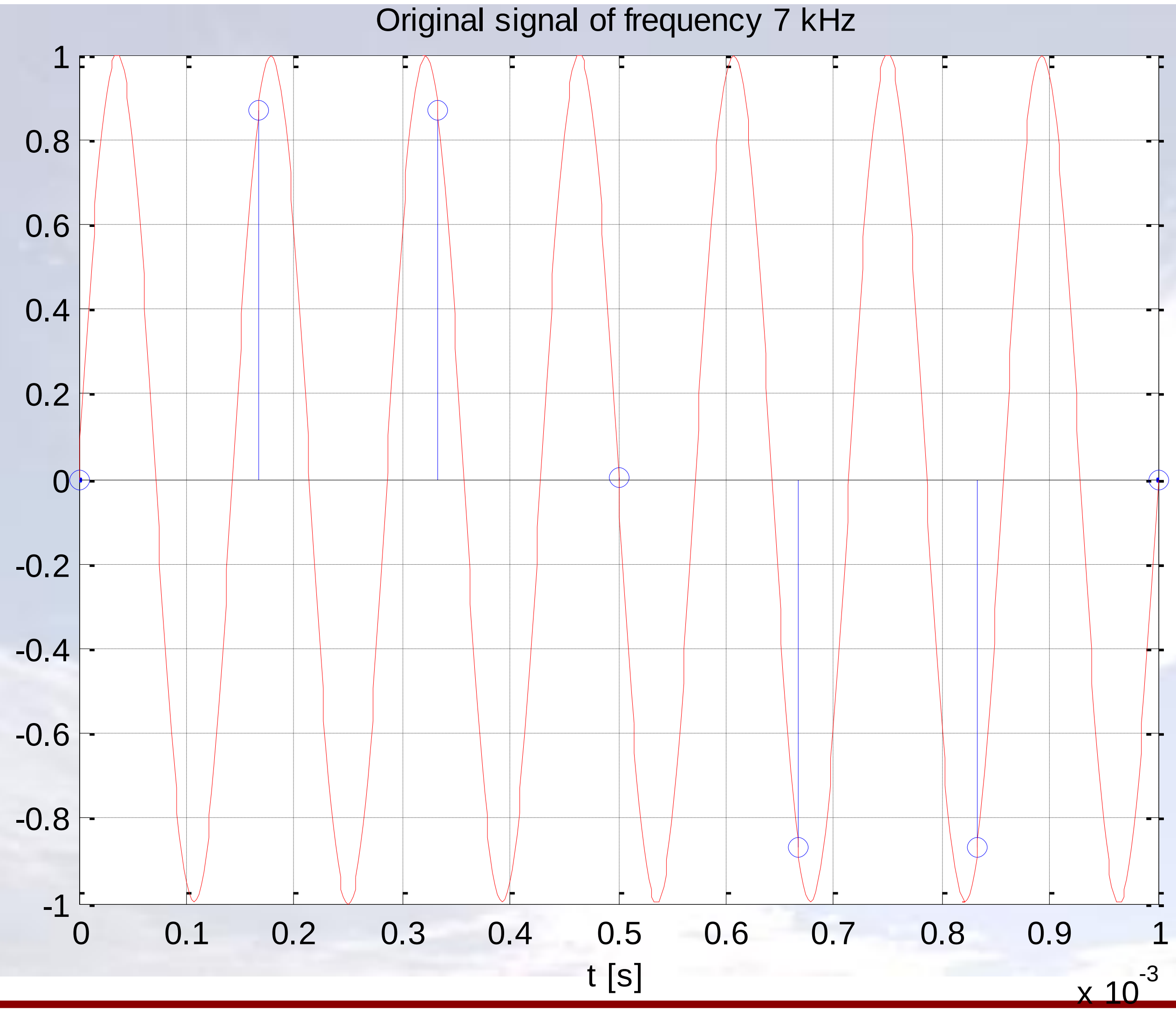
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Aliasing

fx=7kHz

fs=6kHz



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

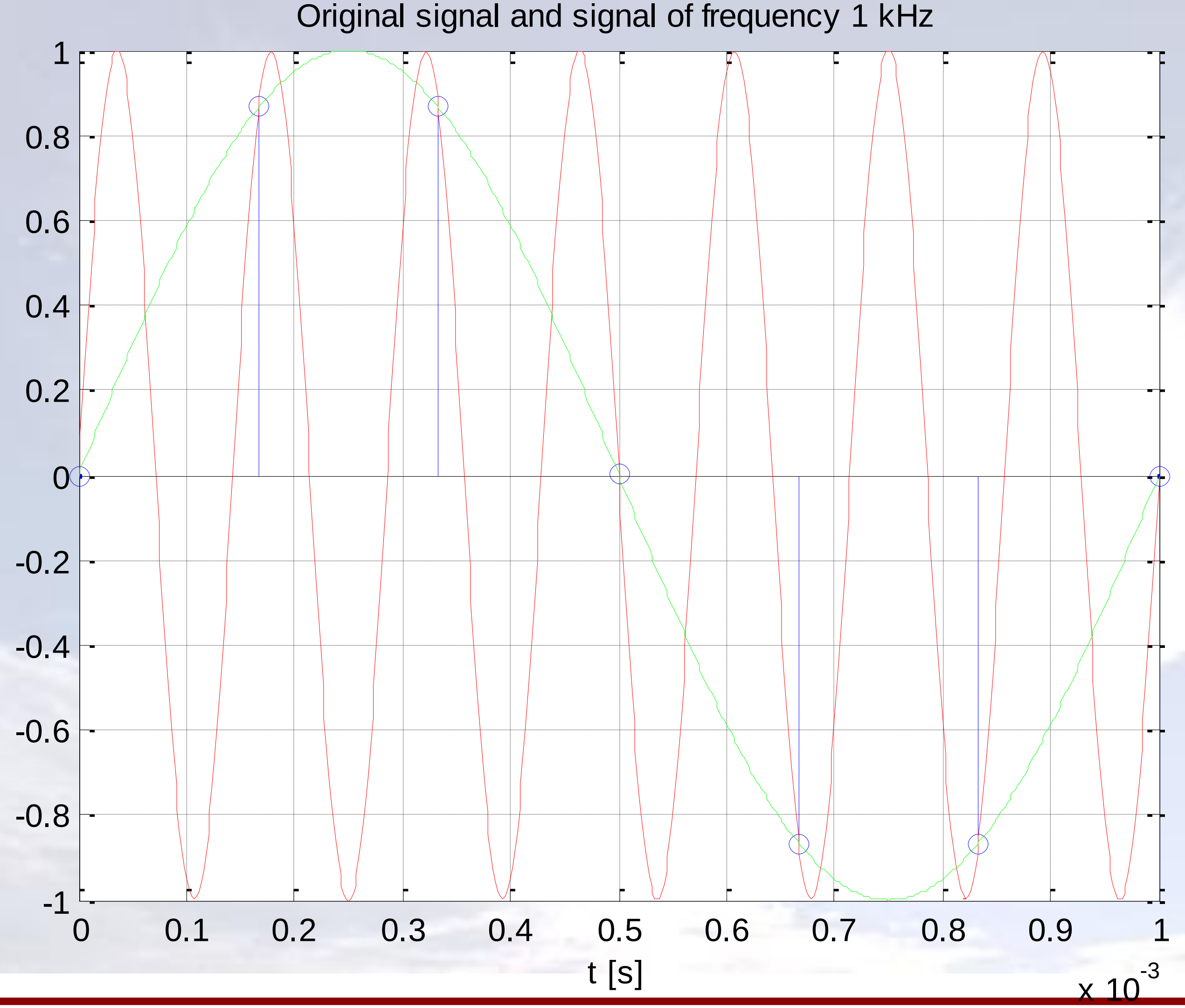
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Aliasing

fx=7kHz

fs=6kHz



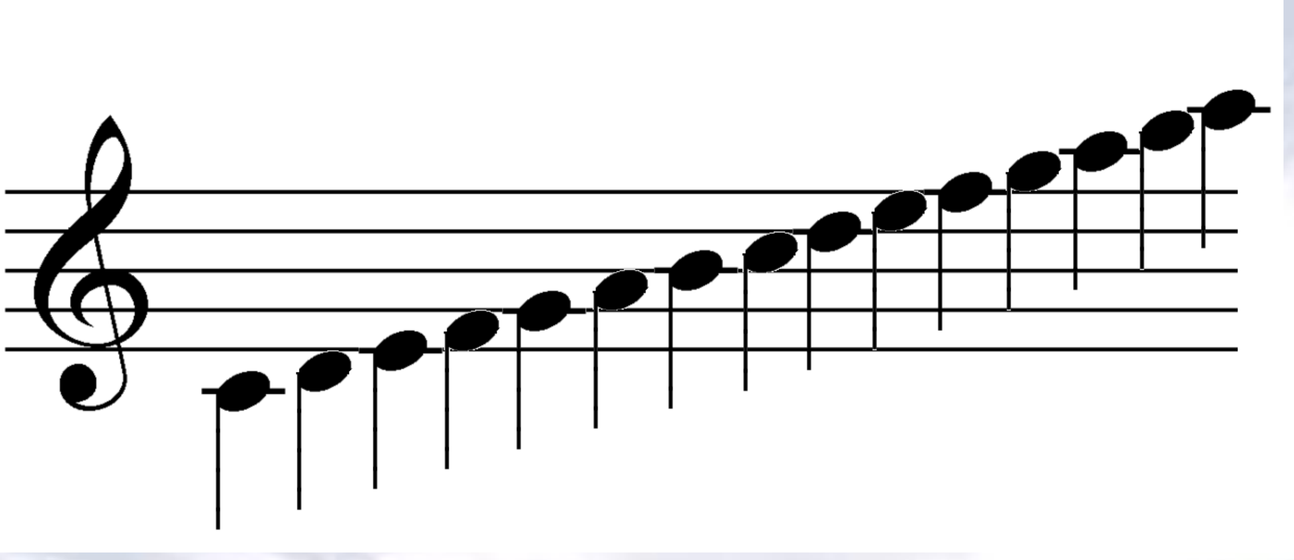
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Aliasing in acoustics

Demo:

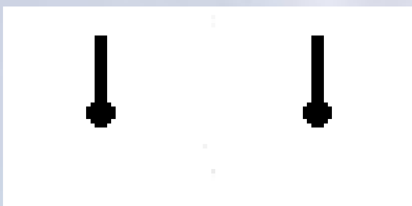


- The C-major scale features max. tone frequency of f=987 Hz
- We listen to the C-major scale for three different sampling rates: fs=5000Hz, 2000Hz i 1000Hz

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

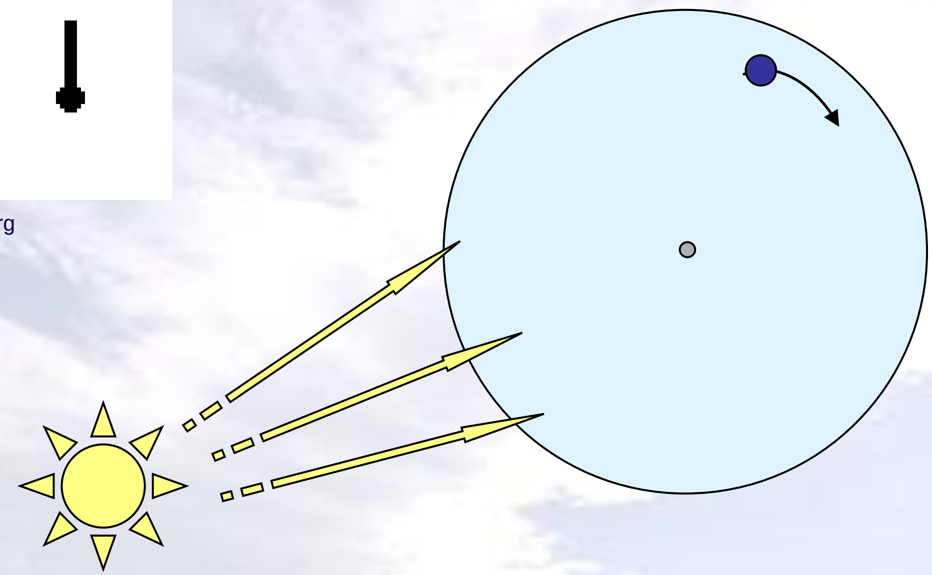
The stroboscopic effect

In order to observe the rotation of the disc, it is necessary to illuminate it at least twice during the period of its rotation.



wikipedia.org

Flash lamp



The effect of stationary hoovercraft blades: www.youtube.com/watch?v=R-IVw8OKjvQ

The sampling Theorem

!

An analog signal $x(t)$, which has a bandlimited spectrum, i.e. $X(f)=0$ for $|f|>f_m$, can be completely reconstructed from its samples if the sampling frequency f_s satisfies the condition:

$$\boxed{f_s > 2 f_m}$$

the Nyquist frequency: $fm=fs/2$

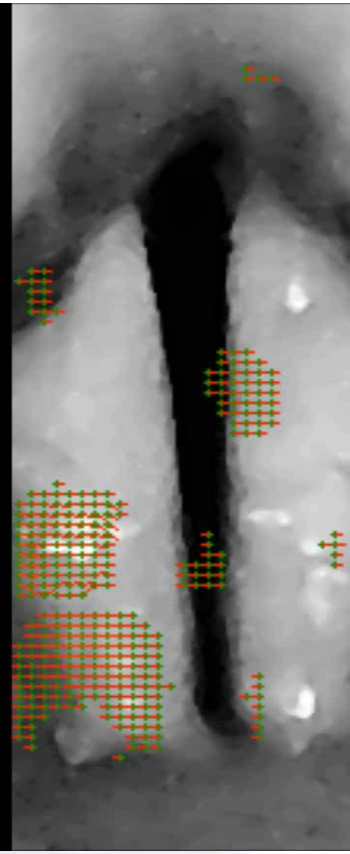
e.g. in GSM system fs=8kHz

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

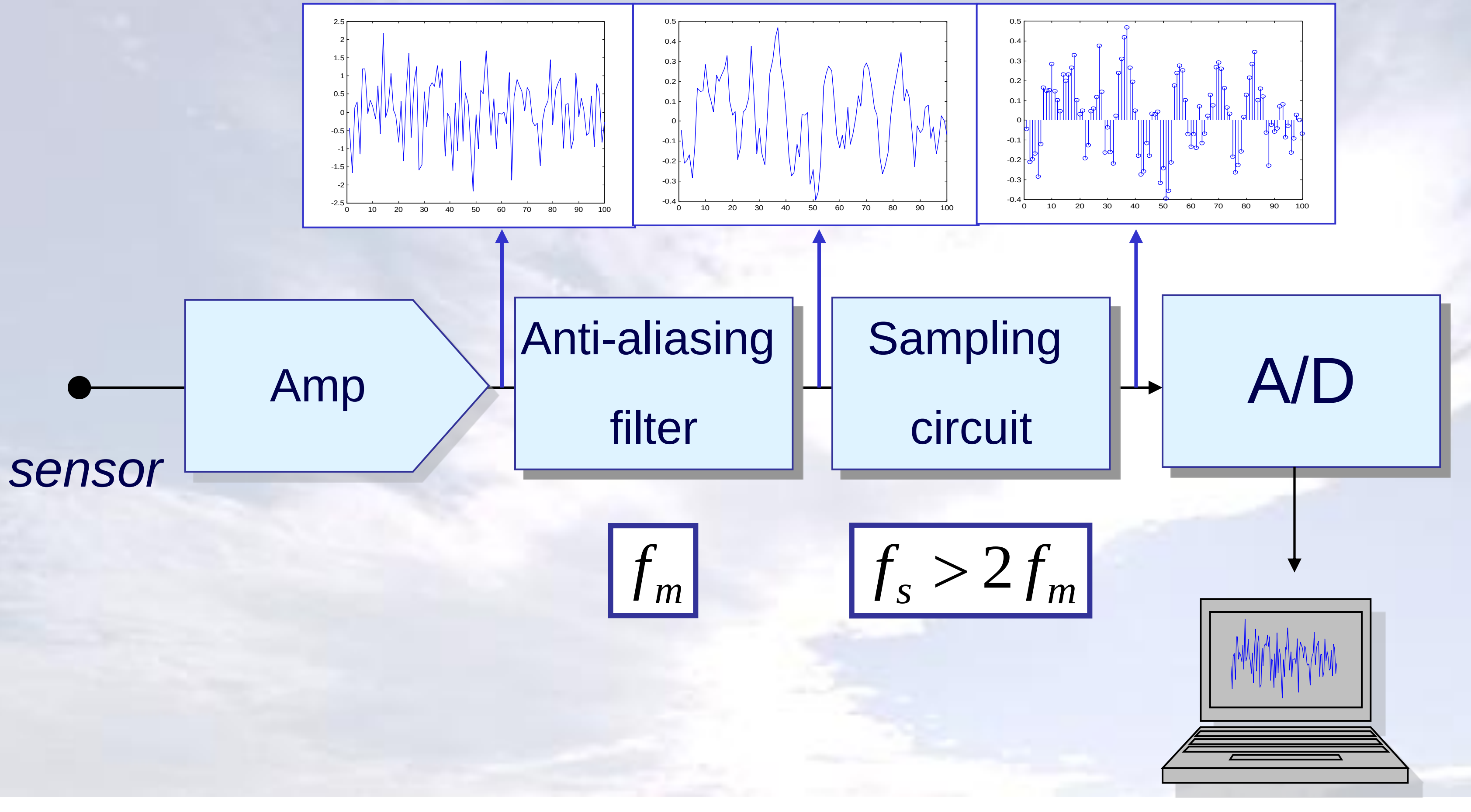
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Intentional use of the stroboscopic effect



Imaging of the vibrating vocal cords: the stroboscope flashes with the frequency: $f_s = f_{cord} - 1\text{Hz}$, where $f_{cord} \cong 200\text{Hz}$ is the vibration frequency of the vocal cords.

Signal acquisition system



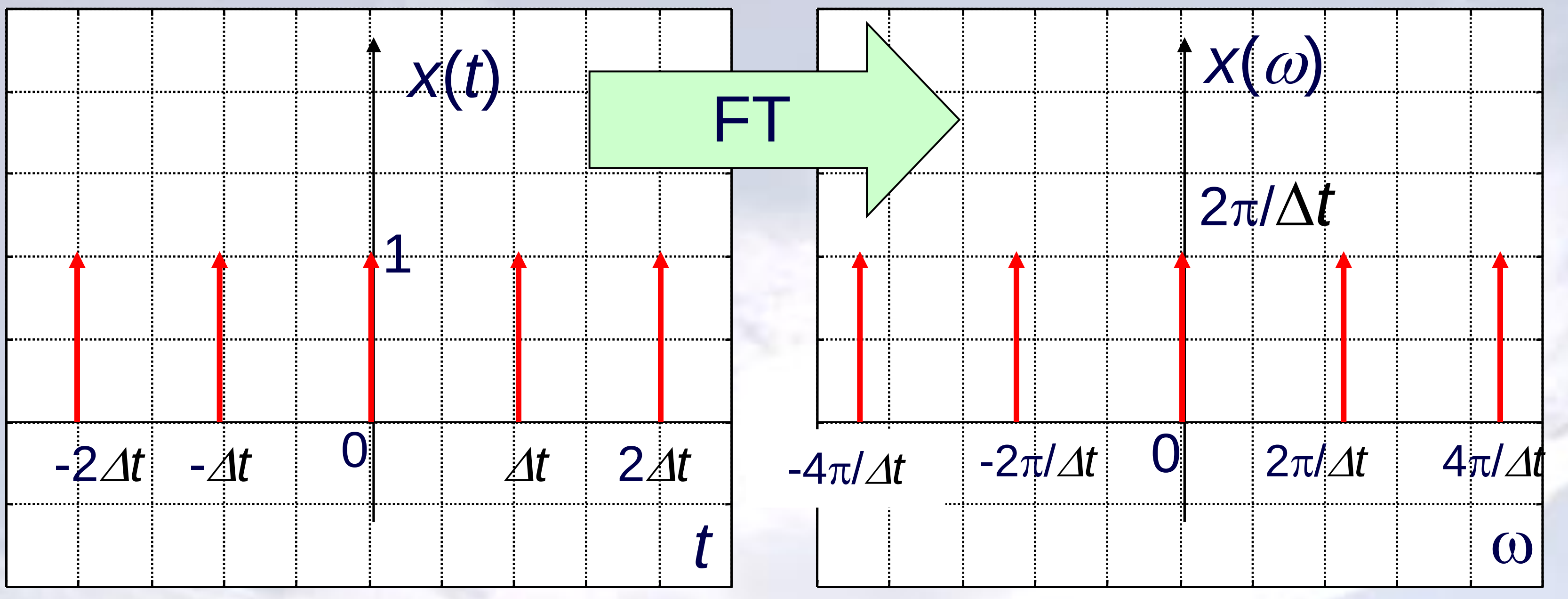
Sampling Theorem – theoretical basis

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(t)\delta(t - n\Delta t)$$

Using the property of Fourier Transform about multiplication of signals, the spectrum of signal $x_p(t)$ can be expressed as a convolution of the signal spectrum with the spectrum of the sampling function:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * \text{Ш}(j\omega)\right]$$

The sampling function - a series of Dirac Impulses



$$\delta_T(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\Delta t) \quad \leftrightarrow \quad Ш(j\omega)=\omega_s\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$\text{where} \quad \omega_s=\frac{2\pi}{\Delta t}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Sampling Theorem

From the property of the Fourier Transform about multiplication of signals:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * \text{Ш}(j\omega)\right]$$ where $$\text{Ш}(j\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t}\sum_{kn=-\infty}^{k=\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

and since the convolution of a signal spectrum with a Dirac impulse shifts the signal spectrum to the position of this impulse:

$$X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_S) = X(j(\omega - \omega_S))$$

Then we obtain:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

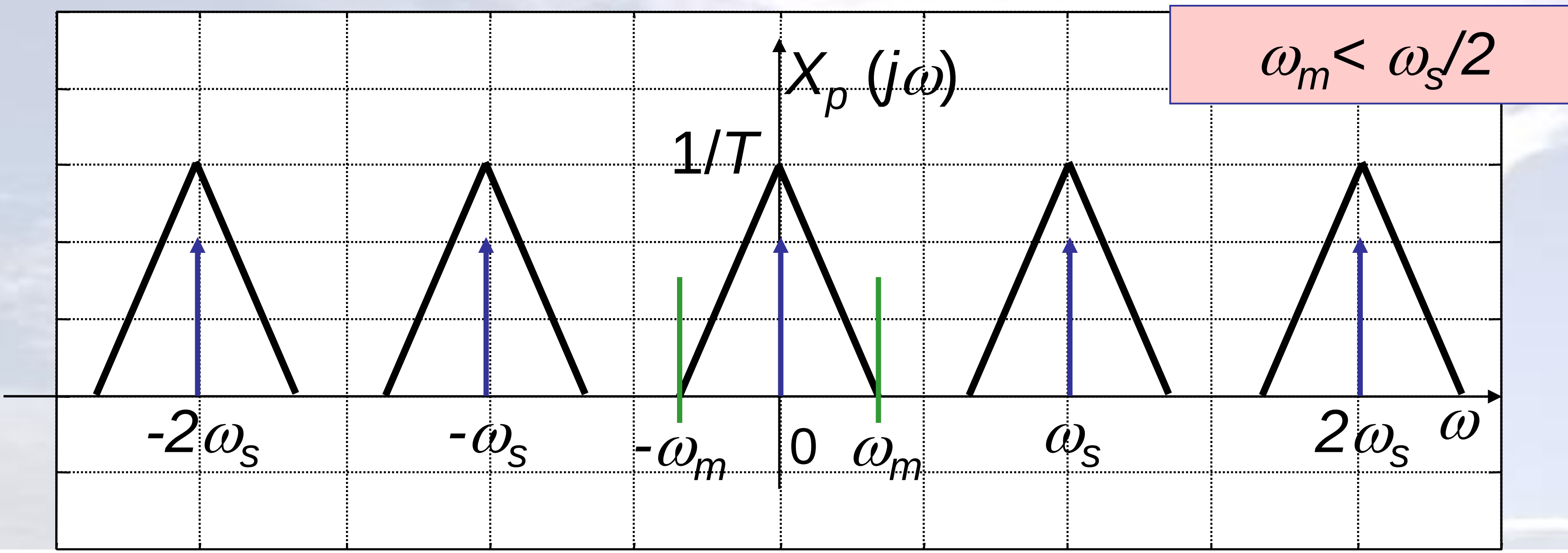
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Sampling Theorem

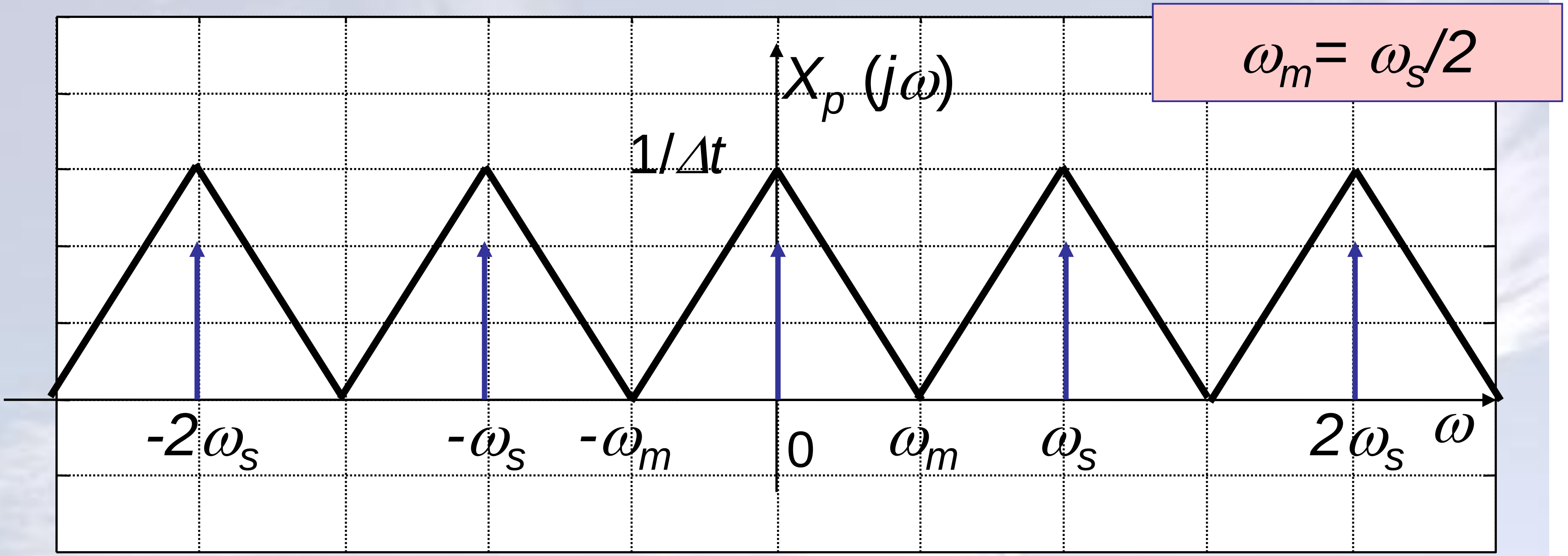
The equation:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

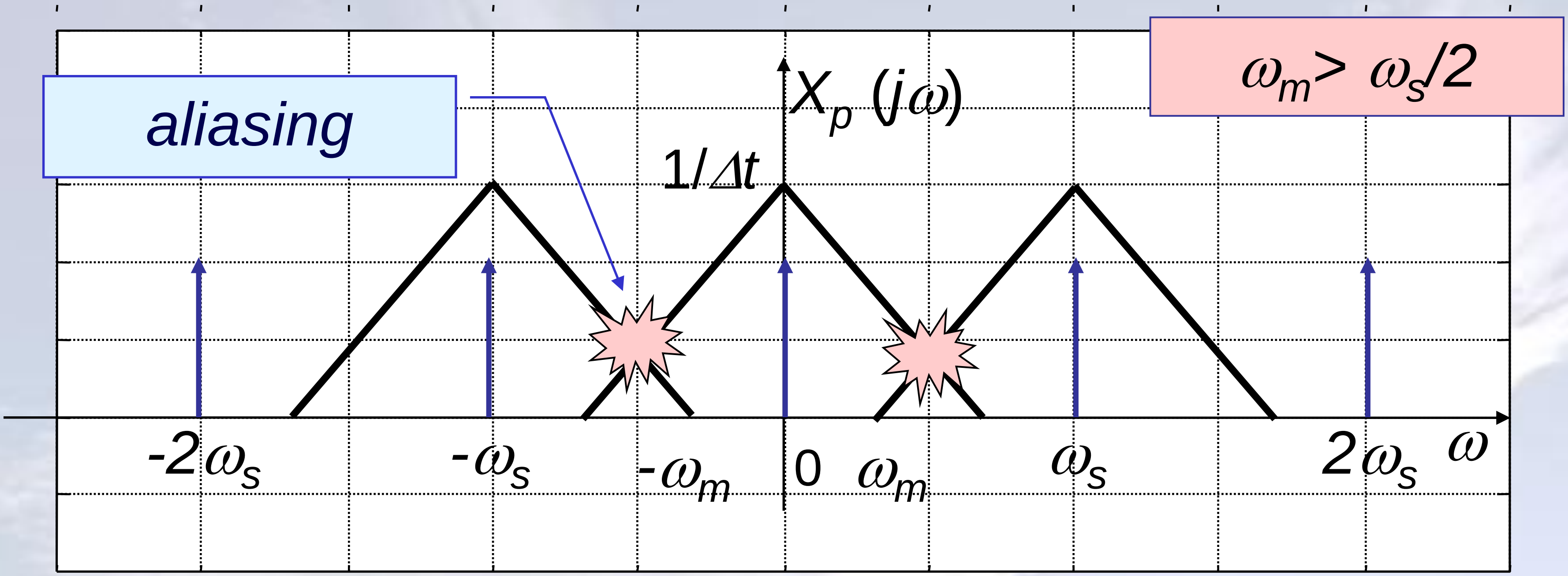
describes so called **periodic replication** of frequency spectrum $X(j\omega)$ of the signal $x(t)$.



Sampling Theorem

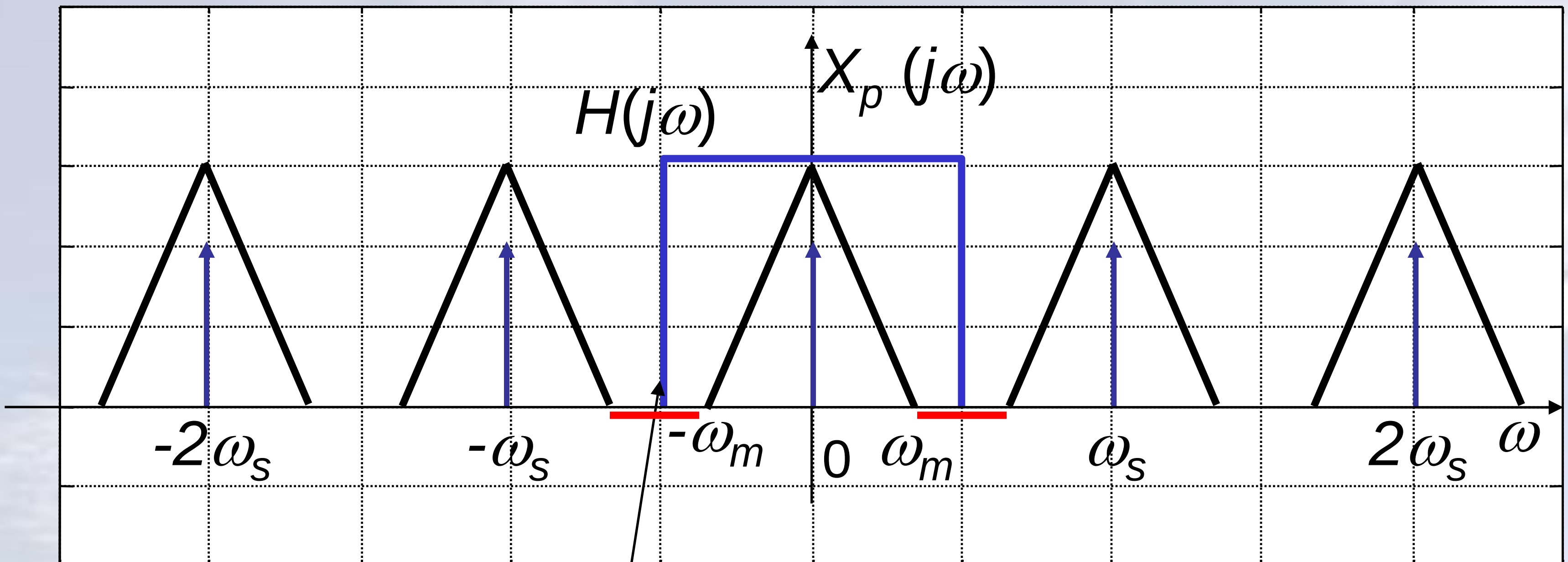


Sampling Theorem



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

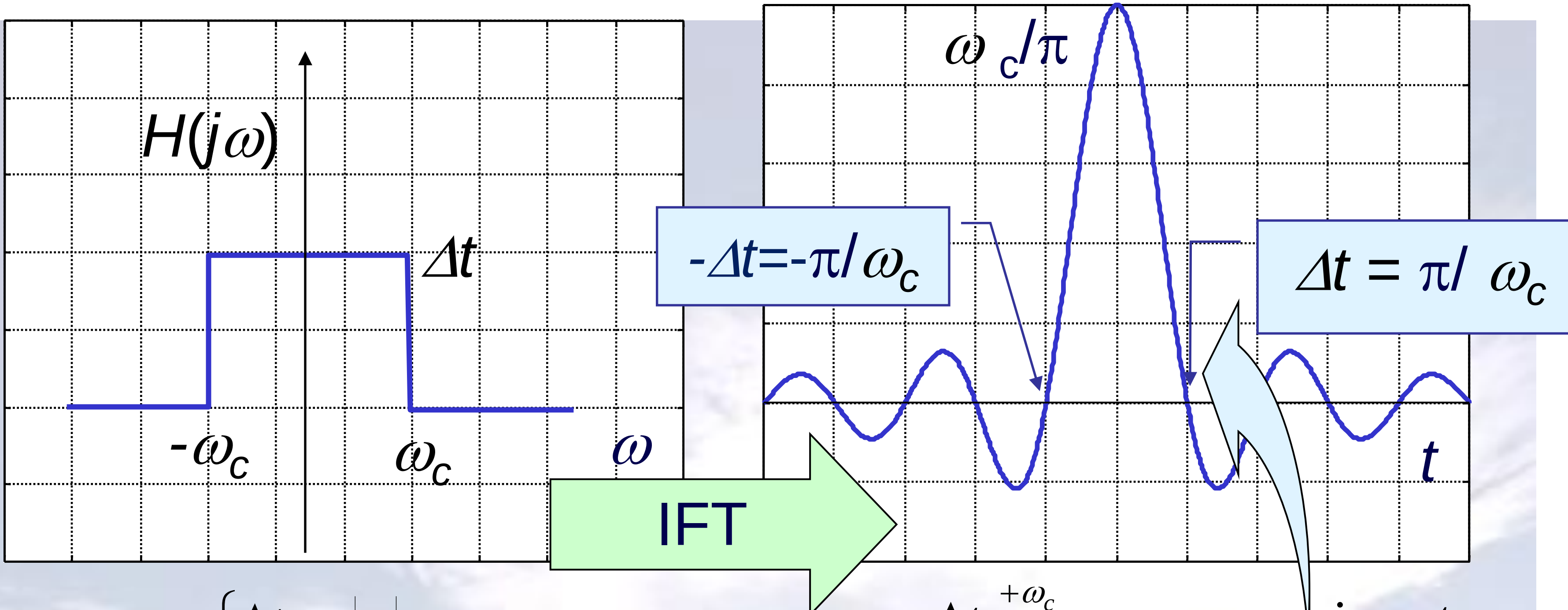
By applying the ideal lowpass filter $H(j\omega)$ it is possible isolate the spectrum of the signal:



$$\omega_m < \omega_c < (\omega_s - \omega_m)$$

It is the safest to choose: $\omega_c = \dfrac{\omega_s}{2}$

Analog signal reconstruction from the discrete signal.

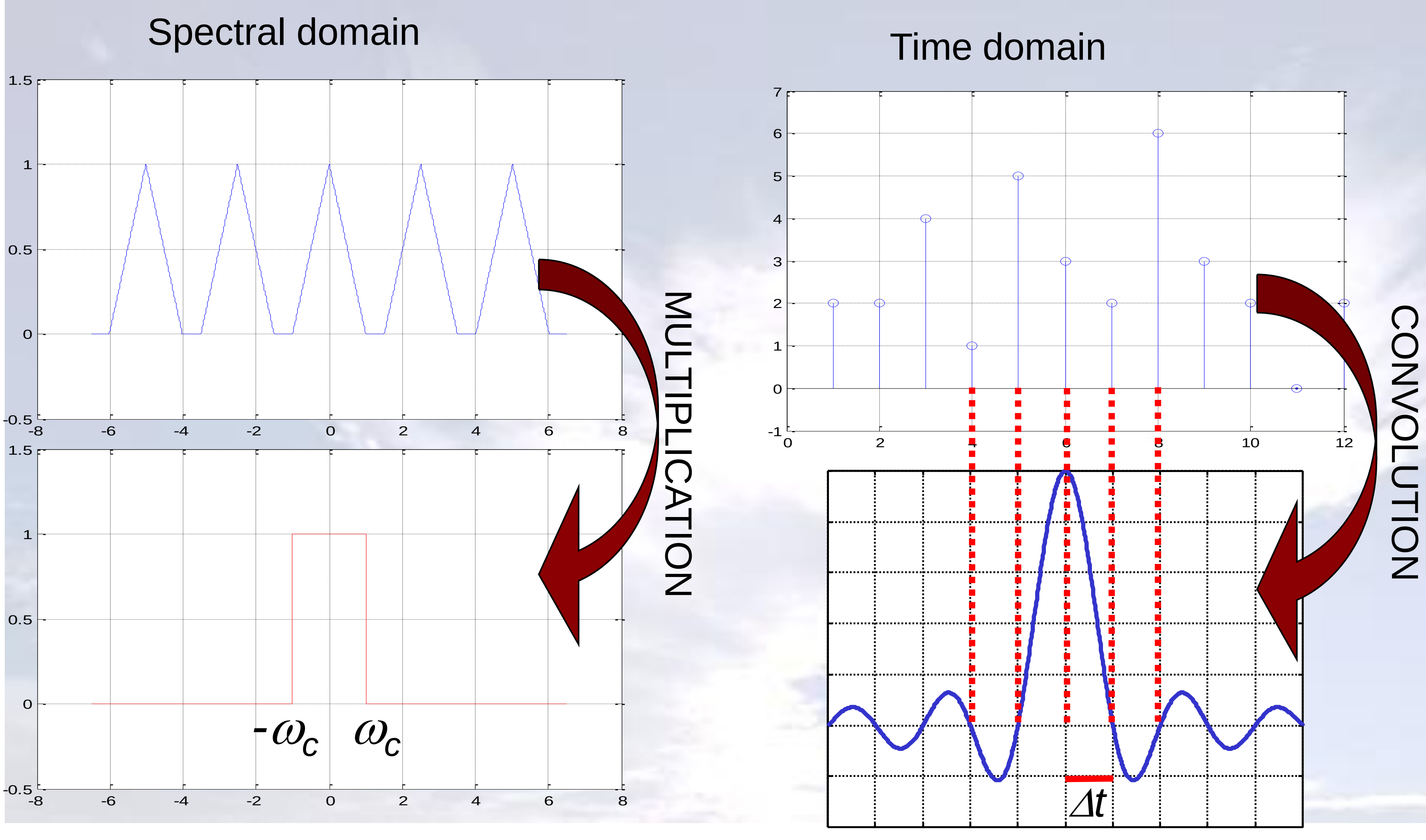


$$H(j\omega)=\begin{cases}\Delta t, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{\Delta t}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega t}\,d\omega=\Delta t\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$

For: $\omega_c=\dfrac{\omega_s}{2} \longrightarrow \dfrac{\pi}{\omega_c}=\dfrac{2\pi}{\omega_s}=\dfrac{2\pi\Delta t}{2\pi}=\Delta t$

Analog signal reconstruction from the discrete signal.



Some properties of Fourier Transform

1. Linearity: $$ax(t)+by(t) \leftrightarrow aX(j\omega)+bY(j\omega)$$

2. Scaling: $$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a>0$$

3. **Convolution:** $$\boxed{x(t)*y(t) \leftrightarrow X(j\omega)Y(j\omega)}$$

4. Multiplication: $$x(t)y(t) \leftrightarrow X(j\omega)*Y(j\omega)$$

5. Parseval's equality: $$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega =$$

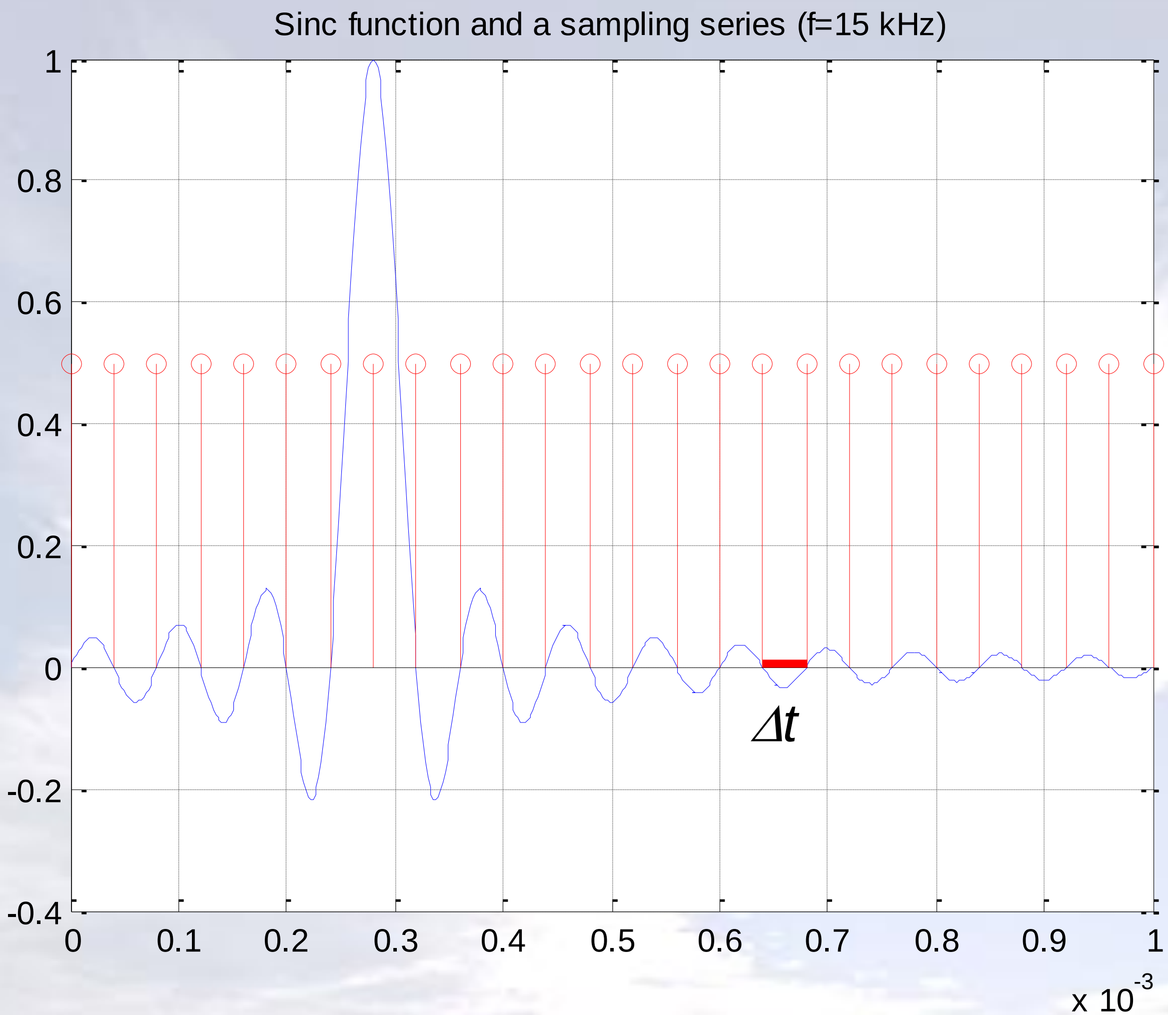
6. Modulation: $$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

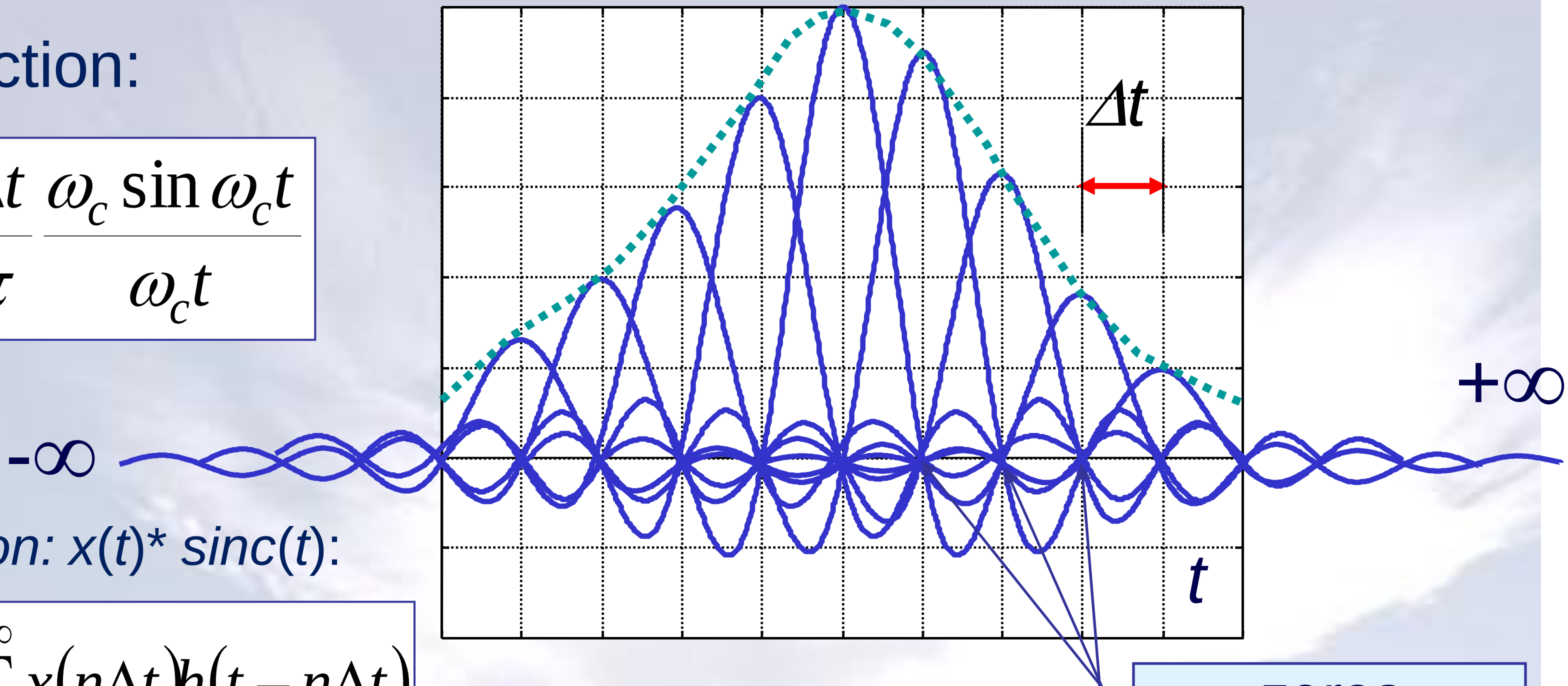
Analog signal reconstruction from the discrete signal.



Interpolation series ‘sinc’

Sinc function:

$$h(t)=\frac{\Delta t}{\pi}\frac{\omega_c \sin\omega_c t}{\omega_c t}$$



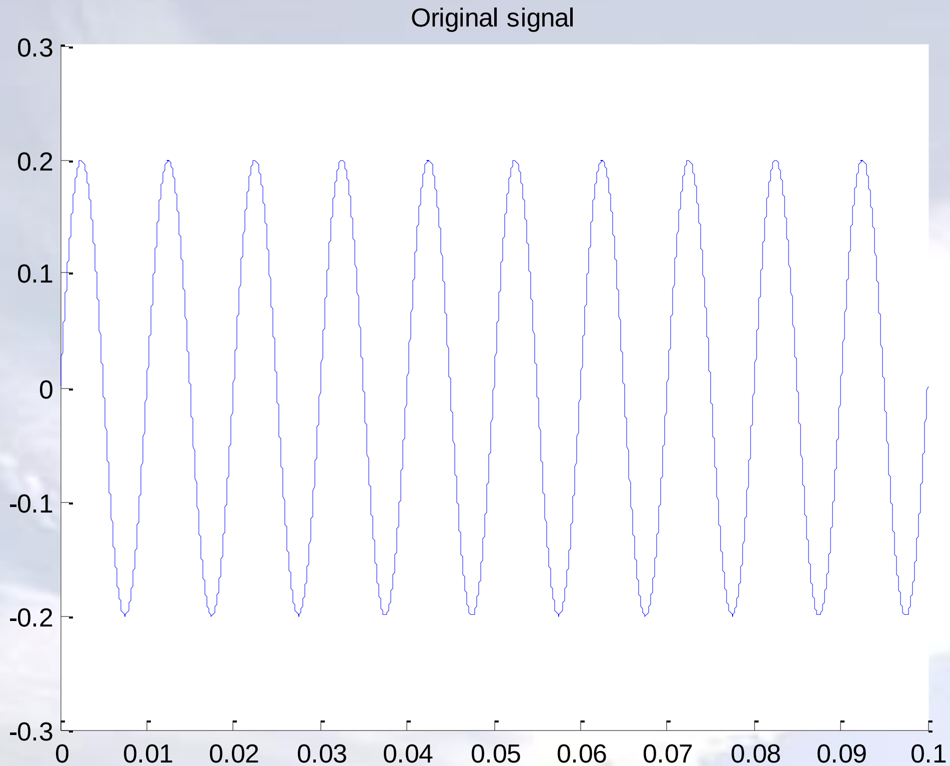
Convolution: x(t) sinc(t):*

$$x_r(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n\Delta t)h(t-n\Delta t)$$

$$x_r(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n\Delta t)\frac{\omega_c\Delta t}{\pi}\frac{\sin(\omega_c(t-n\Delta t))}{\omega_c(t-n\Delta t)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n\Delta t)\operatorname{sinc}(\omega_c(t-n\Delta t))$$

Analog signal reconstruction from the discrete signal.

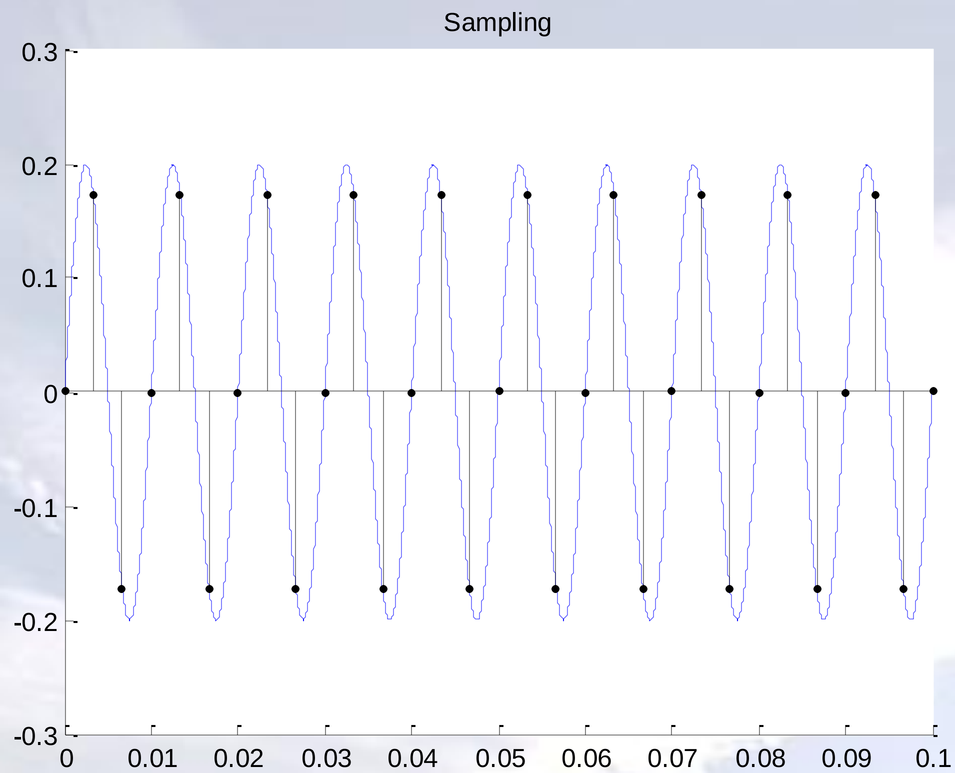
Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

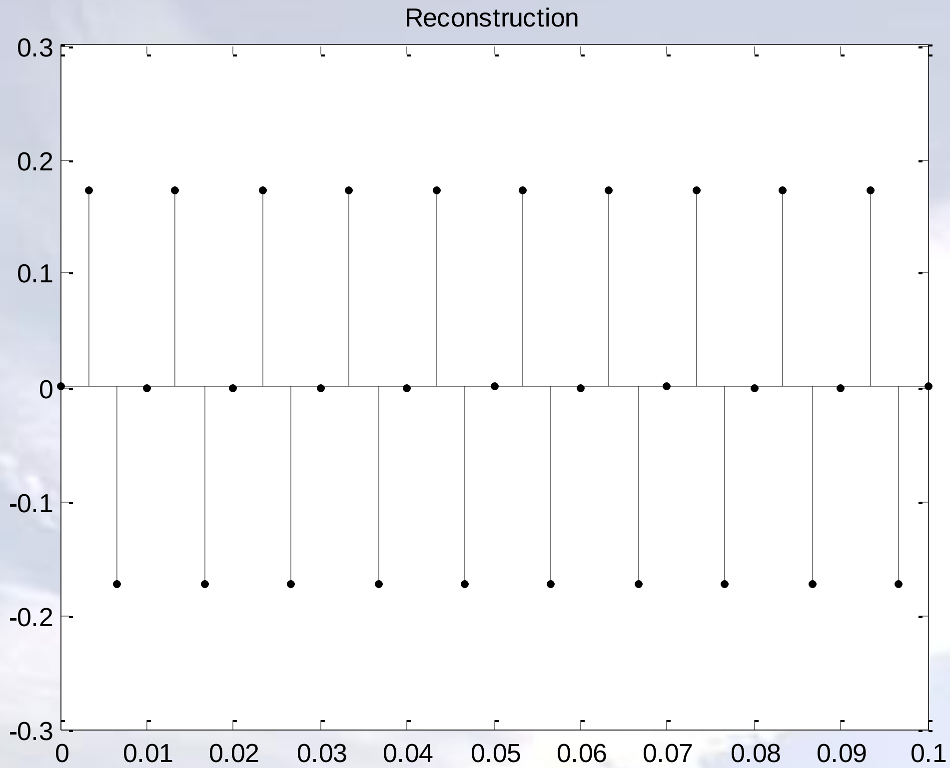
fs=300Hz



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

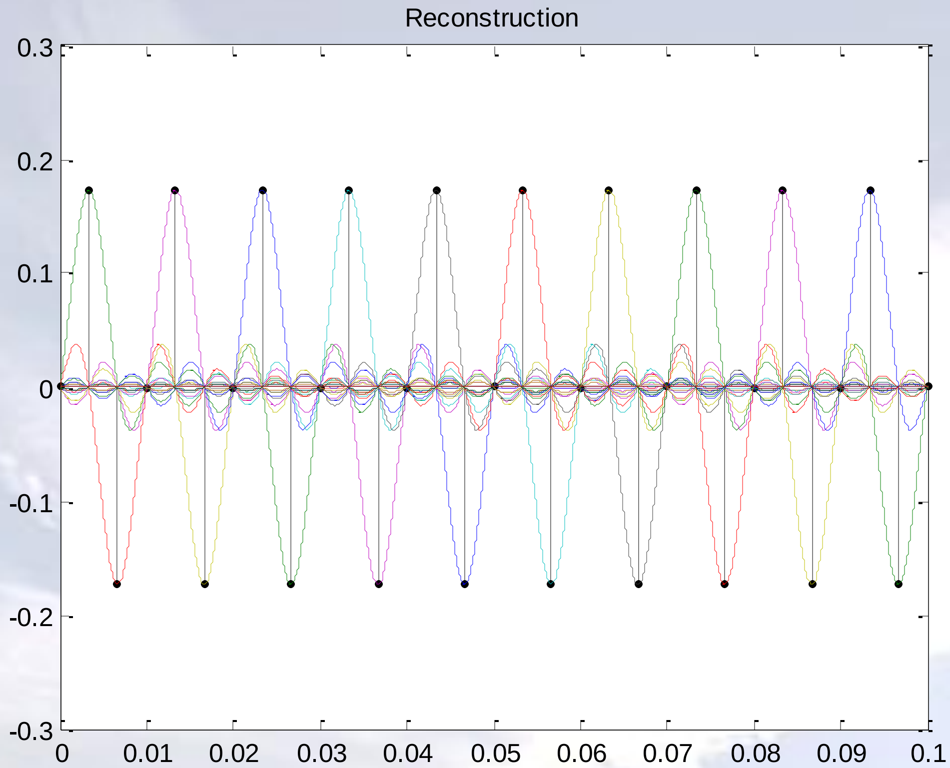
fs=300Hz



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

fs=300Hz

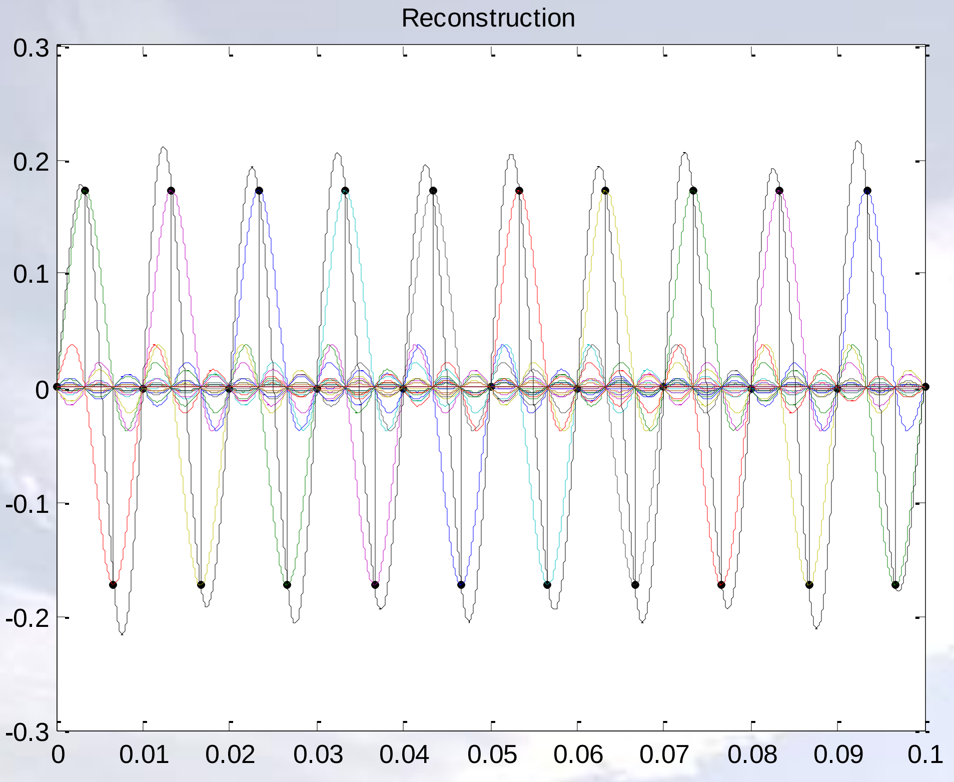


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

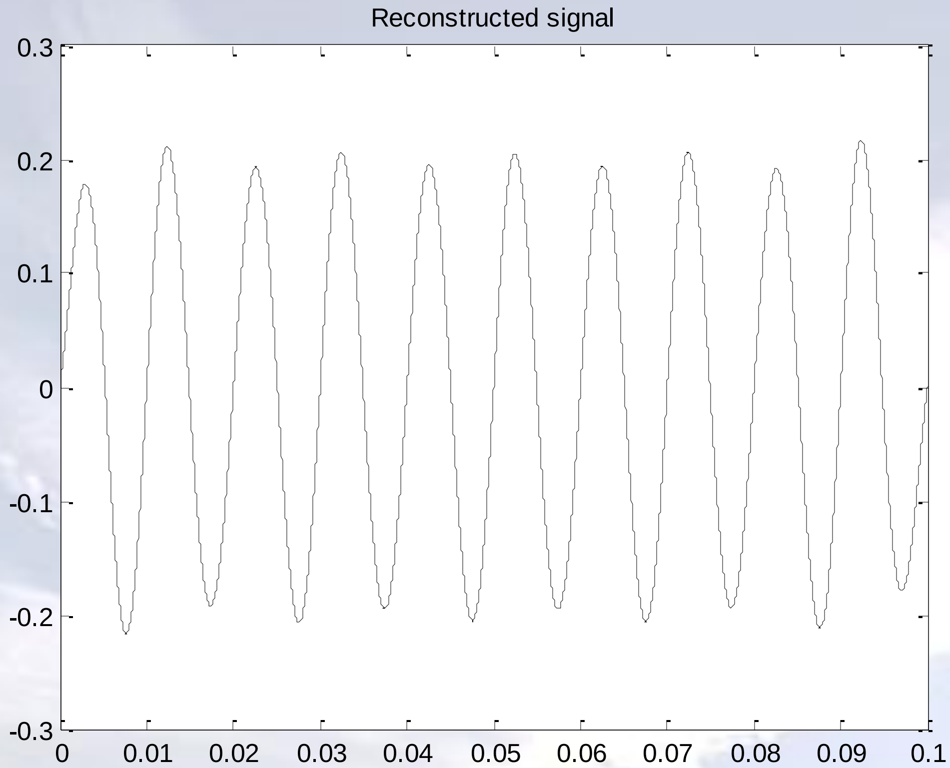
fs=300Hz



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

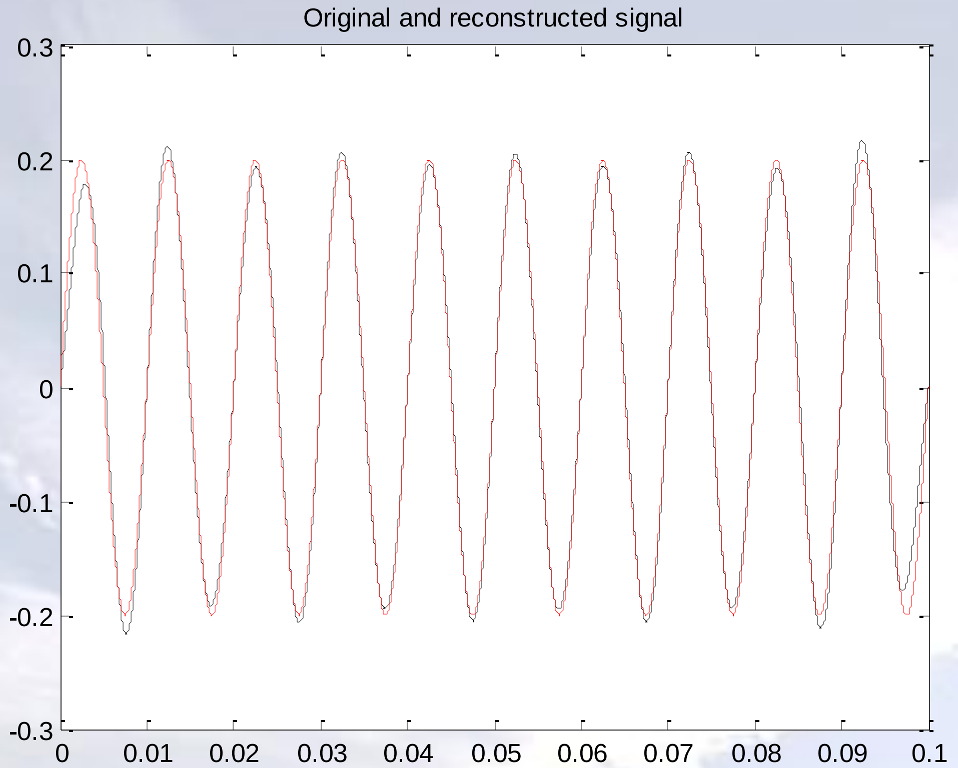
fs=300Hz



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

fs=300Hz

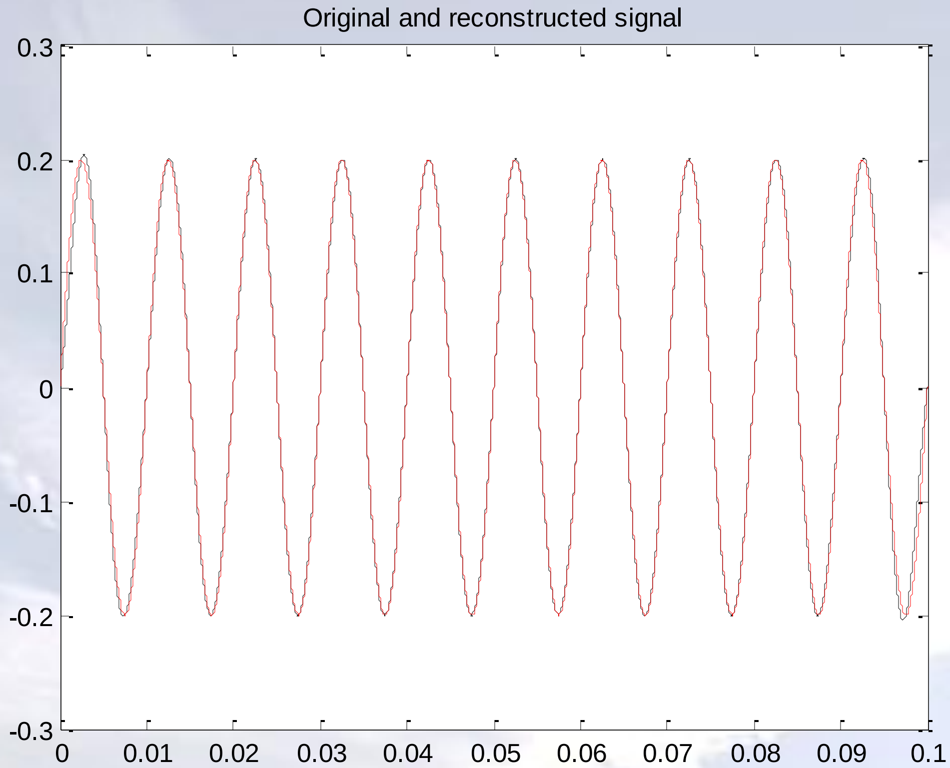


-Samples convolved with finite number of samples of sinc function.
-Boundary conditions result in slight amplitude distortion

Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

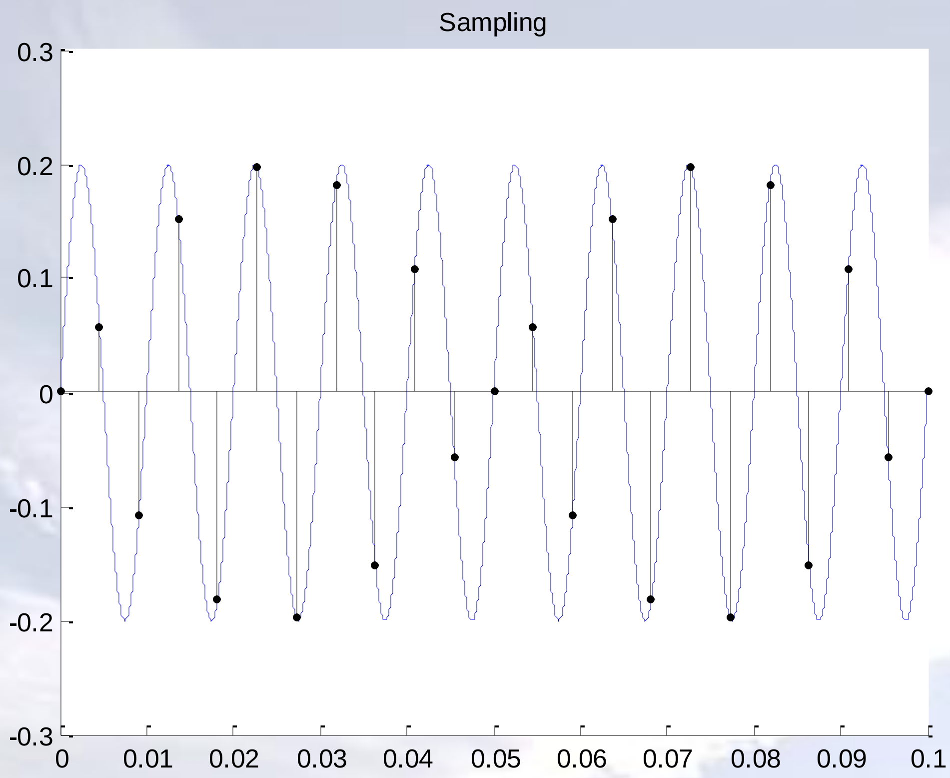
fs=500Hz



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

fs=210Hz!!!!

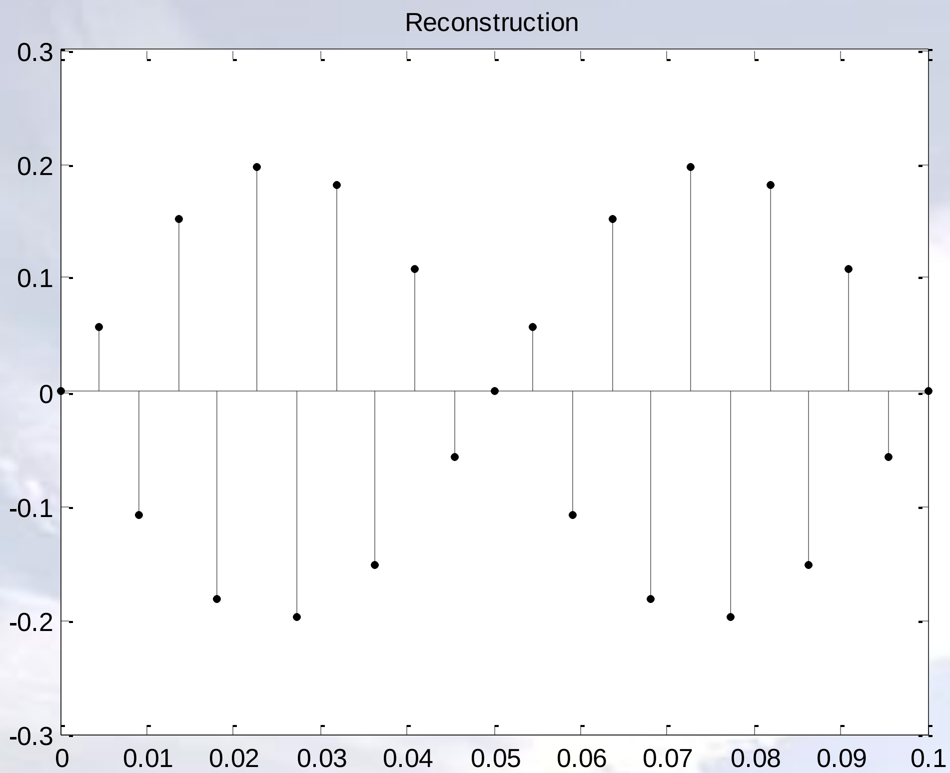


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

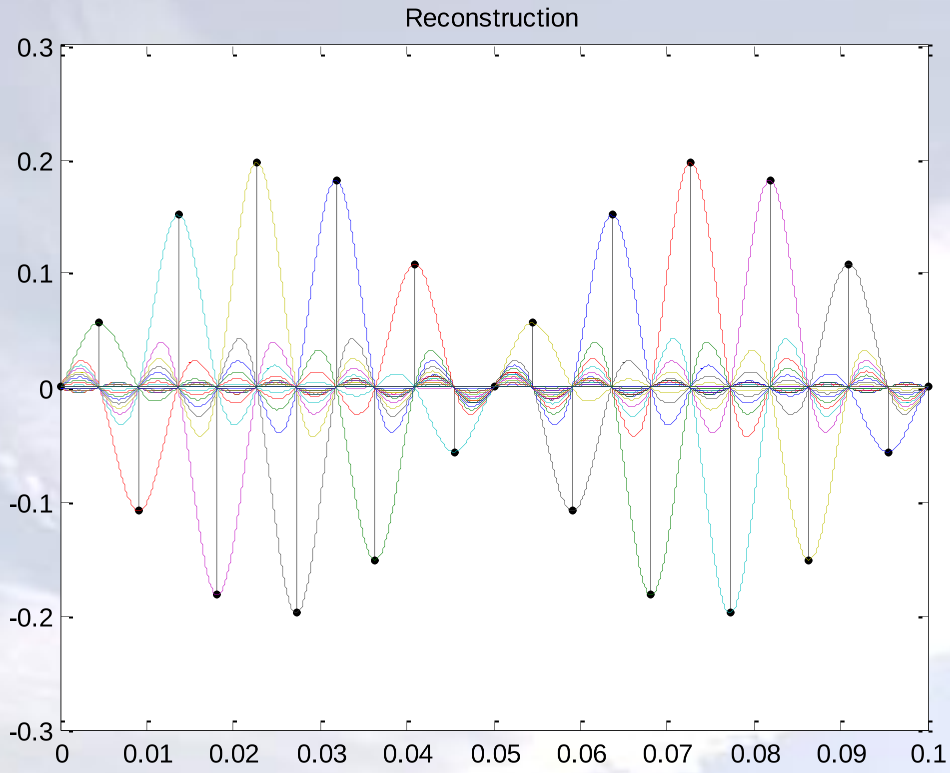
fs=210Hz!!!!



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

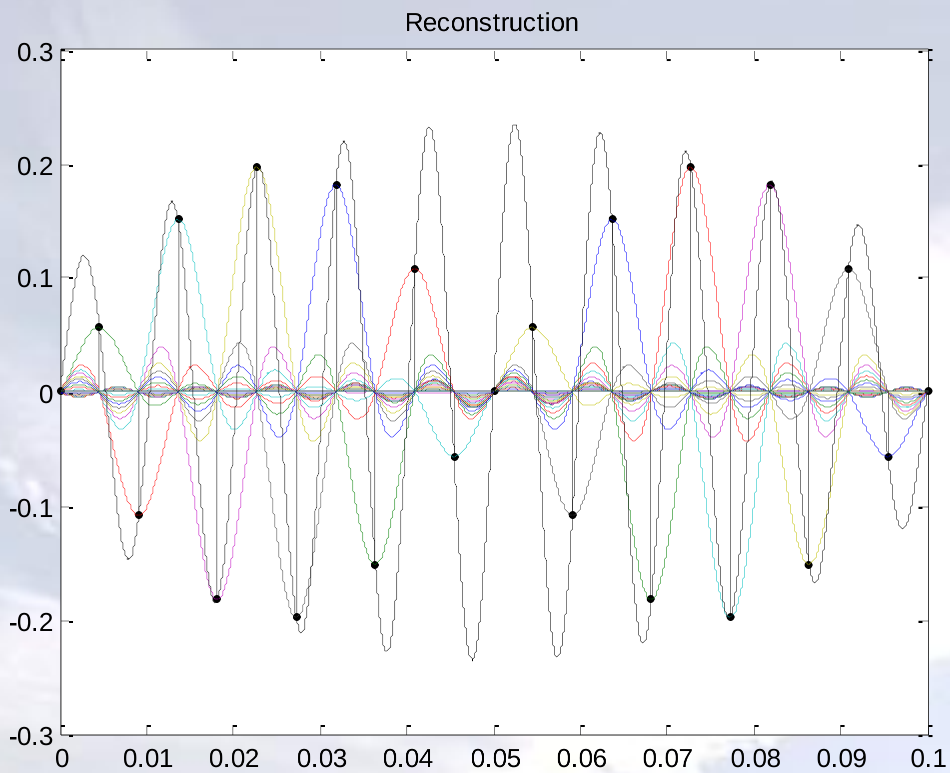
fs=210Hz!!!!



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

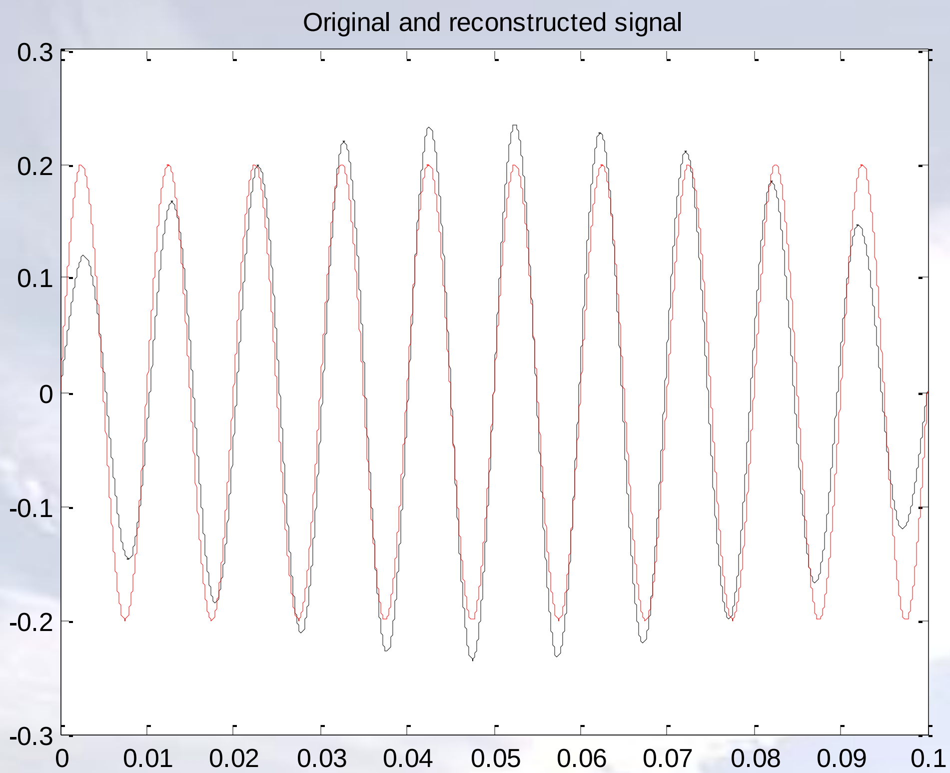
fs=210Hz!!!!



Analog signal reconstruction from the discrete signal.

Sinusoid:
A=0.2
fx=100Hz

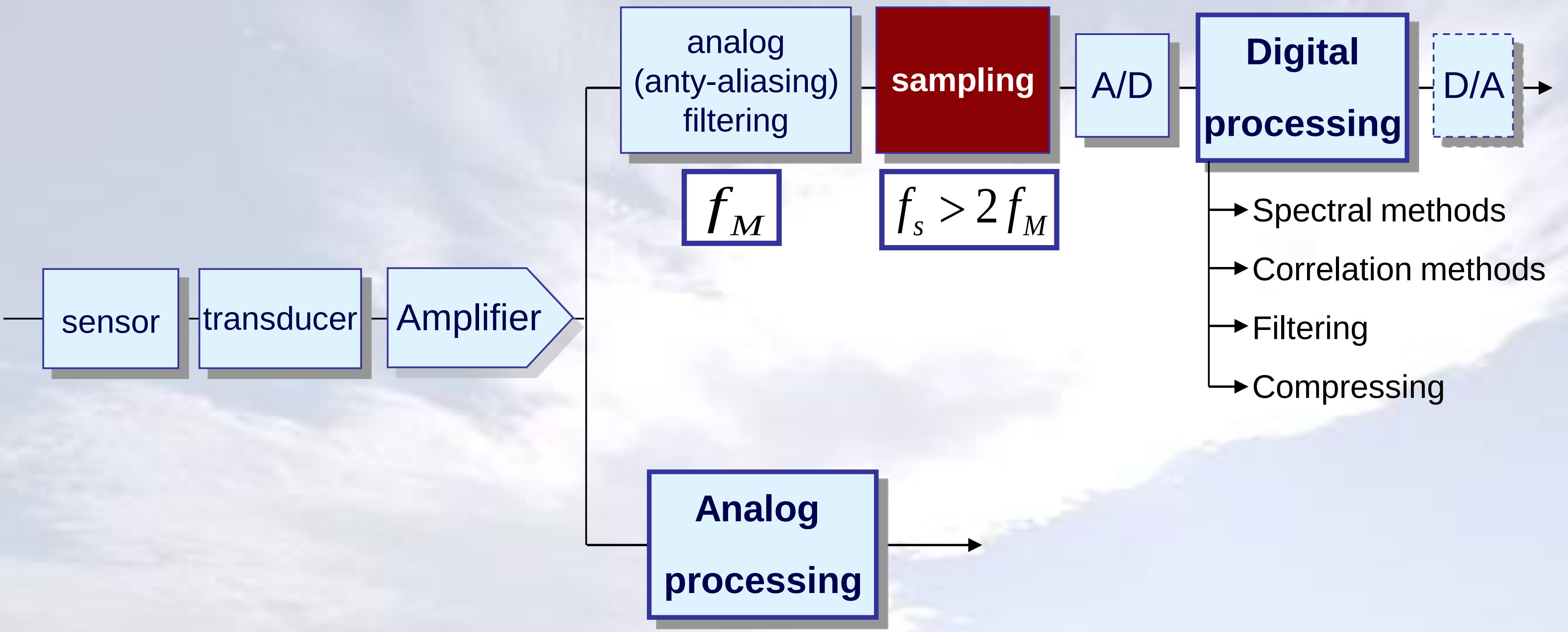
fs=210Hz!!!!



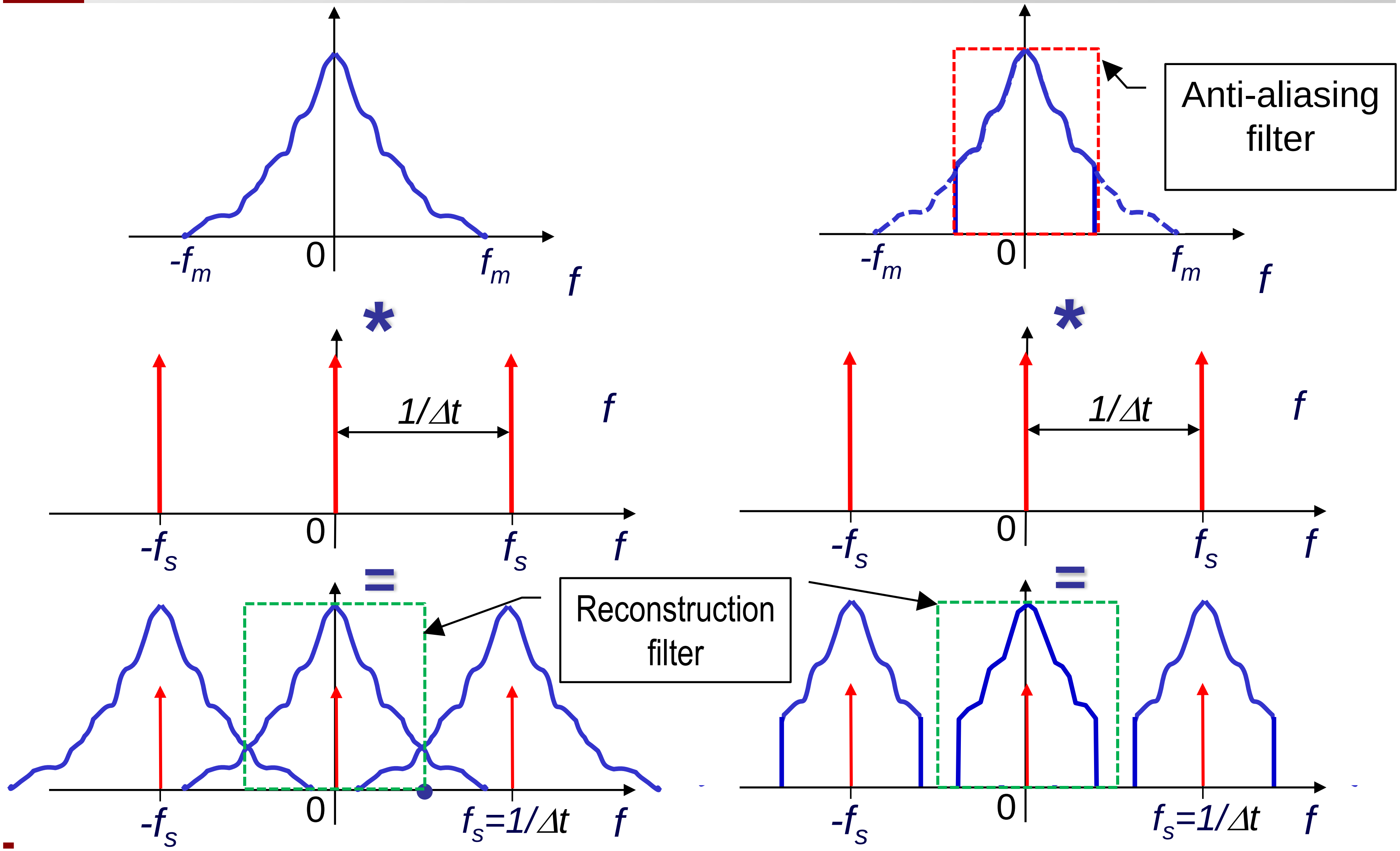
-Samples convolved with finite number of samples of sinc function.
-Boundary conditions result in slight amplitude distortion

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Signal processing



Anti-aliasing filtering



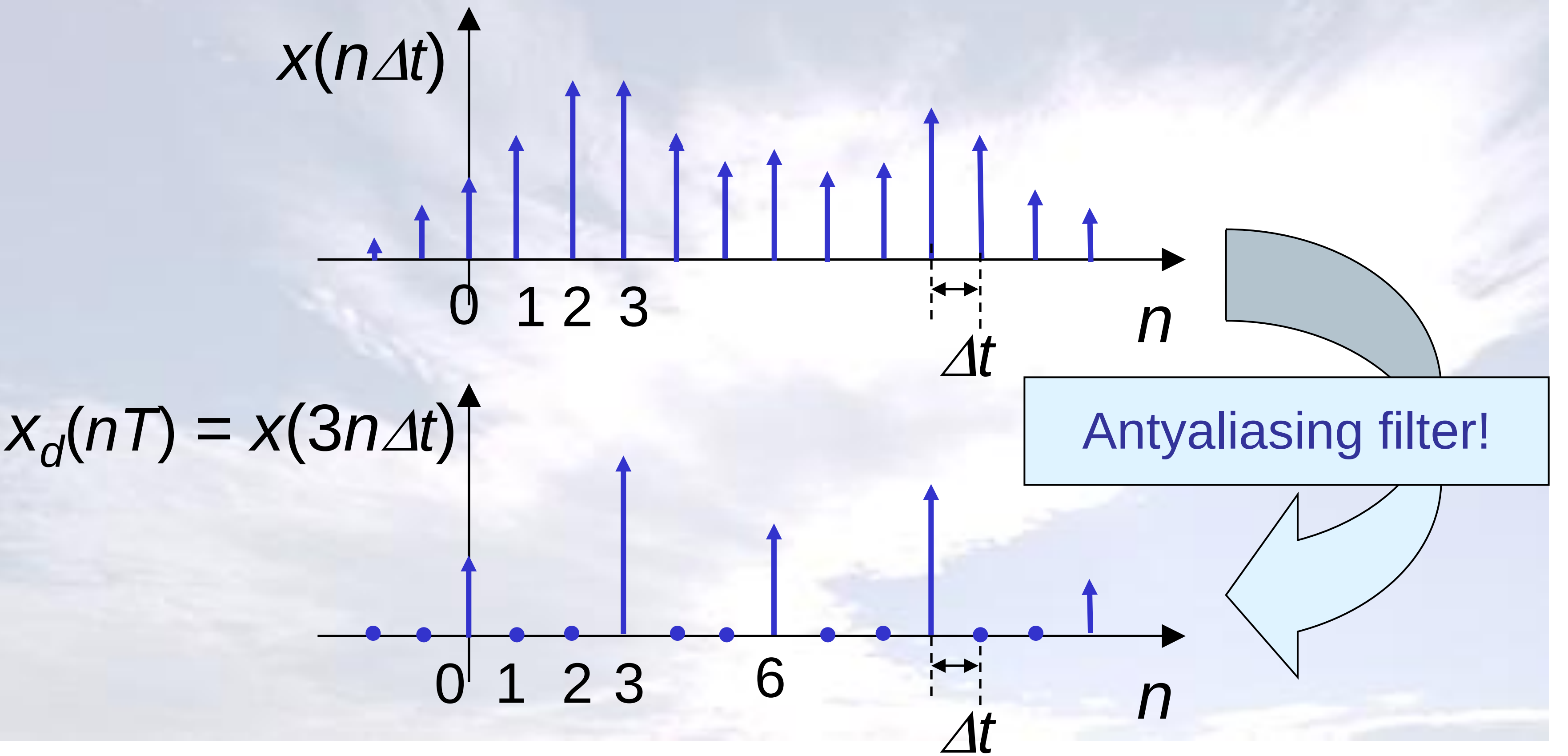
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

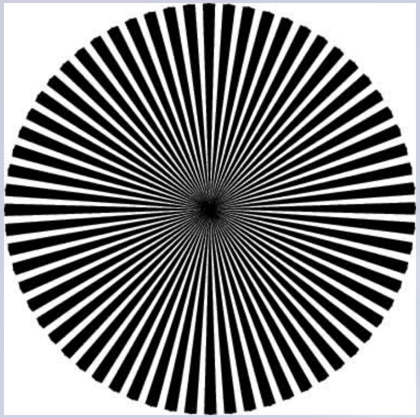
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Sampling rate change

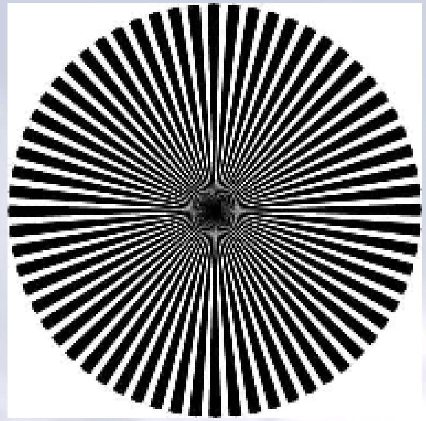
Decimation:



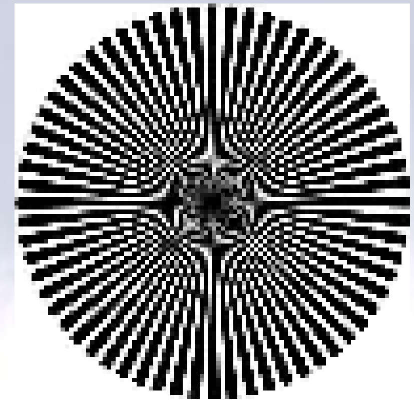
Sampling rate change



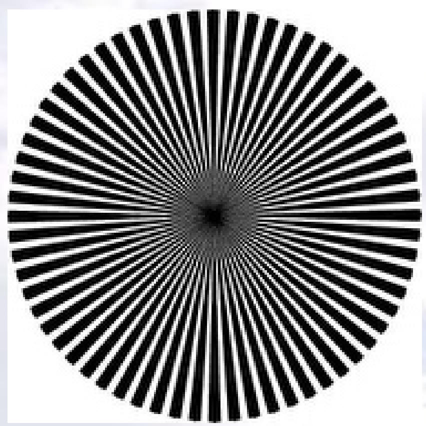
Original image



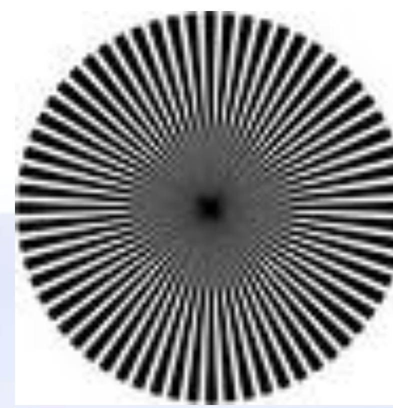
Resampled at 0.5 rate



Resampled at 0.25 rate



Filtered and resampled at 0.5 rate



Filtered and resampled at 0.25 rate

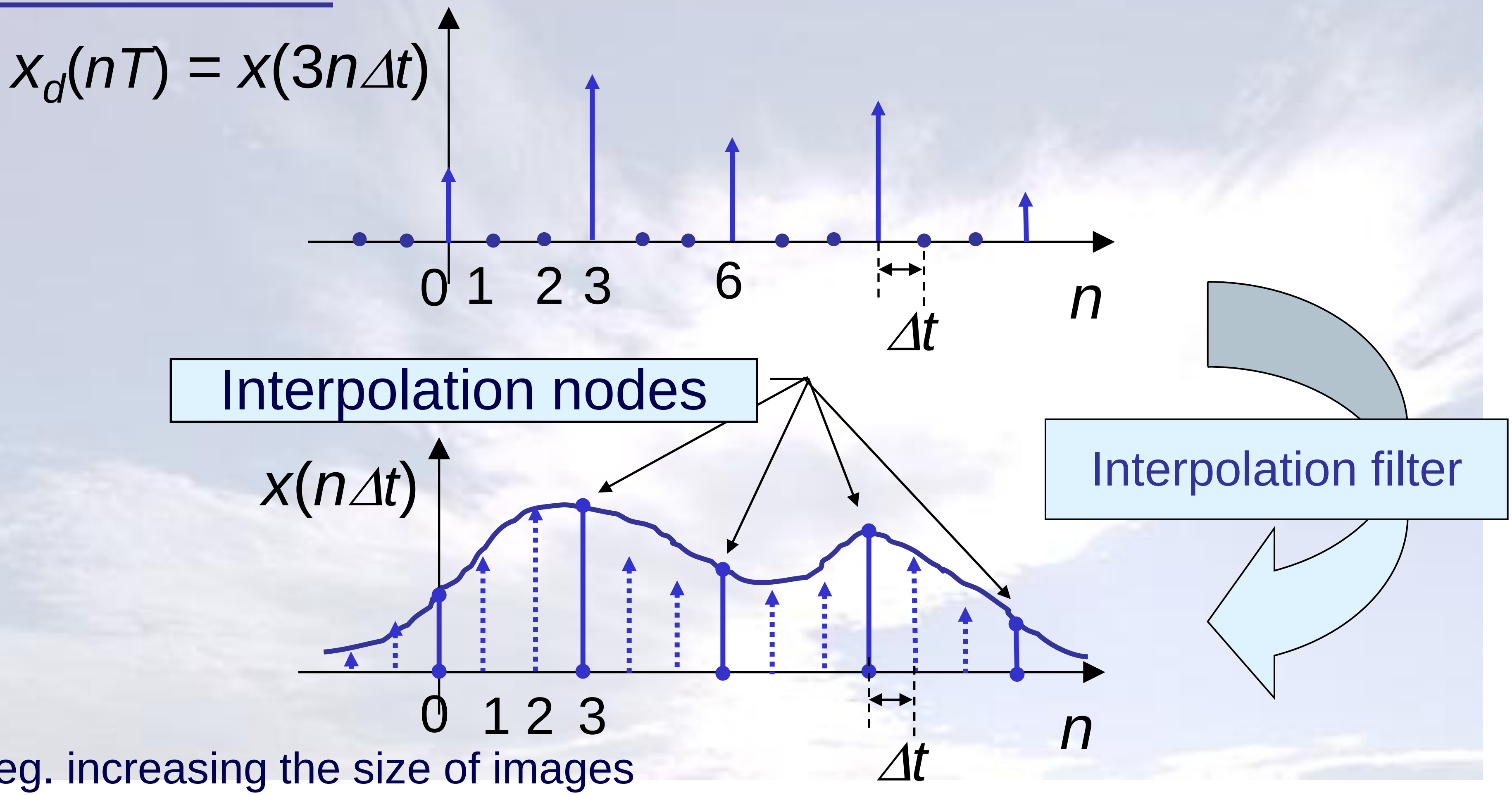
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Sampling rate change

Interpolation:



eg. increasing the size of images

Sampling - summary

1. Sampling basics
2. Periodic spectrum replication
3. Sampling theorem $f_s > 2f_m$
4. Analog signal reconstruction from the discrete signal.
5. Sampling rate change

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

„SIGNAL PROCESSING”

Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego w projekcie pt.

„Innowacyjna dydaktyka bez ograniczeń - zintegrowany rozwój Politechniki Łódzkiej - zarządzanie Uczelnią, nowoczesna oferta edukacyjna i wzmacniania zdolności do zatrudniania osób niepełnosprawnych”

Politechnika Łódzka

Politechnika Łódzka, ul. Żeromskiego 116, 90-924 Łódź, tel. (042) 631 28 83
www.kapitalludzki.p.lodz.pl